Mérési hiba, hibaterjedés

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2019. február 13.

Mérési adatok

A méréseket műszerrel végezzük, aminek van

- mérési tartománya
- mérési pontossága

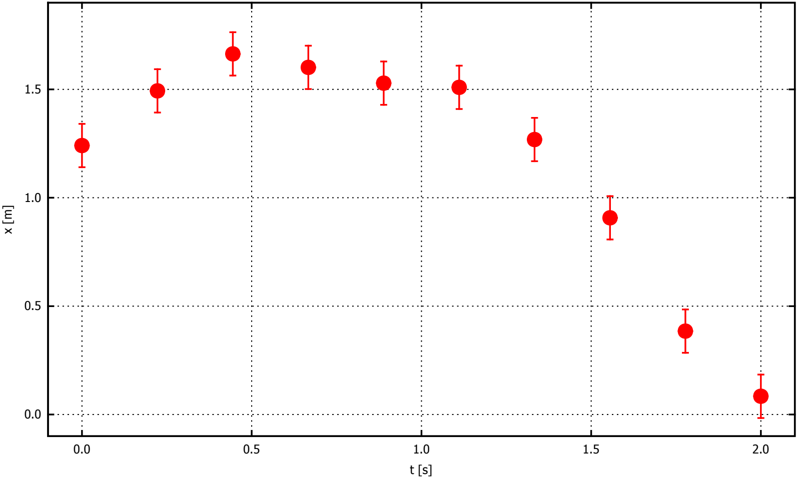
A mért értékek emiatt lehetnek

- valódi mért értékek (hibával!)
- felső korlátok, alsó korlátok

A mért értékek hibákkal terheltek

- a műszer kalibrációjából eredő *szisztematikus hiba*
- a műszer véletlenszerű működéséből eredő *statisztikus hiba*
- a *külső környezetből* származó zaj
- a műszer "felbontásából" eredő *leolvasási hiba*
- a fizikai *folyamat jellegéből* adódó zaj

Egy kísérlet eredménye becsült hibával



A szisztematikus hiba

A szisztematikus hibát nehéz kezelni

- a műszer kalibrációjának pontossága
- nem véletlenszerű $\Rightarrow$ statisztikus módszerekkel nem kezelni
- mindig hozzáadódik a méréshez
- lehet állandó: ekkor nullponti hibáról van szó
- de függhet a mért értéktől is

Csökkentéséhez a műszert kalibrálni kell.

A statisztikus hiba

Megismételt méréskor mindig már és más értéket mérünk. A statisztikus hiba a mérés jellegéből adódóan *véletlenszerű*

- tökéletlen műszer
- a műszer érzékeny lehet külső, random tényezőkre
- ezek valamilyen háttérzaj jellegű tényezők, sosem közvetlenül a mért folyamatból erednek
- akkor is jelentkeznek, ha a műszer be van kapcsolva, de nem mérünk vele semmit
- termikus, elektromágneses stb. random zajok

Csökkentéséhez a műszert hűteni, elektromágnesesen árnyékolni, stb. kell.

A leolvasási hiba

A leolvasási hiba a műszer számábrázolásából adódik

- A mutató megállhat két érték között is
- A digitális kijelzőn véges sok tizedesjegy van
- A digitális kijelző utolsó számjegye ugrálhat

Csökkenteni jobb felbontású műszerrel lehet.

Példa:

- Egy műszer két tizedes jegyet ír ki, ekkor a leolvasási hiba $\pm 0{,}005$

A Poisson-zaj

A mérési hiba és a *zaj* nem feltétlenül ugyanaz

- a mérési hiba a műszer tökéletlensége
- a zaj lehet a mért fizikai folyamat saját tulajdonsága

CCD detektor sörétzaja

- egy távcső kamerája nagyon halvány galaxisokat rögzít
- a CCD detektor képes megszámolni a beérkező fotonokat
- egy perc alatt nagyon kevés foton érkezik
- a fotonok nem azonos időközönként érkeznek
- emiatt a percenként detektált fotonok száma minden percben más és más

A Poisson-zaj

A mérési hiba és a *zaj* nem feltétlenül ugyanaz

- a mérési hiba a műszer tökéletlensége
- a zaj lehet a mért fizikai folyamat saját tulajdonsága

CCD detektor sörétzaja

- egy távcső kamerája nagyon halvány galaxisokat rögzít
- a CCD detektor képes megszámolni a beérkező fotonokat
- egy perc alatt nagyon kevés foton érkezik
- a fotonok nem azonos időközönként érkeznek
- emiatt a percenként detektált fotonok száma minden percben más és más

Sörétzaj áramkörökben

- az elektron töltés diszkrétsége miatt
- pl nagyon kicsi a áramokat mérünk, alacsony hőmérsékleten, akkor a relative nagy ingadozások erre vezethetőek vissza
- (általában vannak egyéb zajforrások is az áramban)

A Poisson-eloszlás

Kiindulás:

- egységnyi idő alatt érkező fotonok száma: λ
- a fotonok *egymástól függetlenül* követik egymást

Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott egységnyi időintervallum alatt éppen k darab fotont detektálunk?

Poisson-eloszlás[1]:

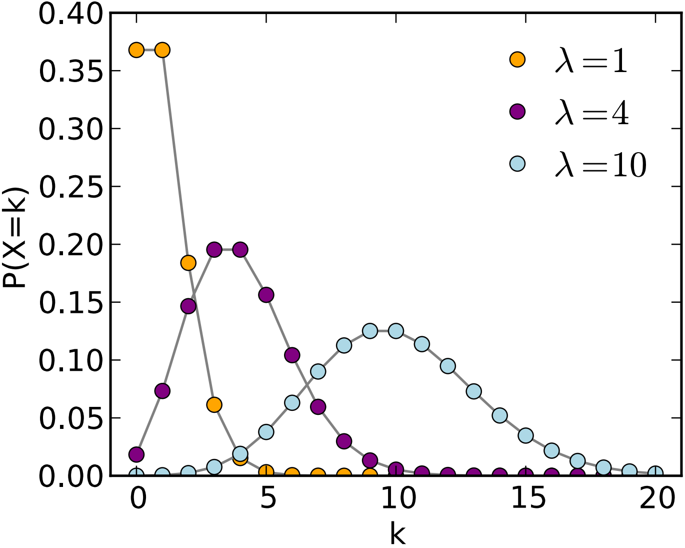
$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Várható értéke és szórása:

$$\langle k \rangle = \sigma^2 = \lambda$$

[1]levezetése: binomiális eloszlásból $p = \lambda/n$, $n \to \infty$ határesetben

A Poisson-eloszlás különböző *k*-kra



A Poisson-eloszlásból adódó mérési hiba

A Poisson-eloszlás $\lambda \gg 1$ esetben átmegy a Gauss-eloszlásba

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

ahol $\mu = \lambda$ és $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Keressük annak a várható értékét, hogy egy rövid mérés mennyire tér el a nagyon hosszú időre vett átlagtól. Ezt jól jellemzi a σ szórás.

A *jel–zaj arány*[2] a várható érték és a random eltérések aránya:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

A relatív hiba ennek reciproka.

[2] signal to noise ratio (SNR)

A statisztikus hiba eloszlása

Ismételjük meg ugyanazt a mérést sokszor egymás után, majd tekintsük az átlagtól való eltérést.

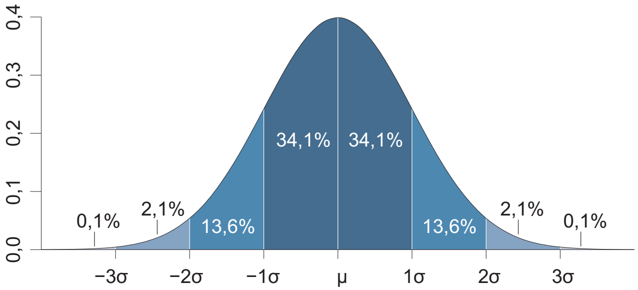
- Az átlagtól való eltérést jellemezze a négyzetes eltérés (szórás vagy variancia)

Ha a mérési hiba *sok független* valószínűségi változó *átlagaként* áll elő.

- akkor érvényes rá a centrális határeloszlás tétel, azaz
- a hiba eloszlása Gauss-eloszlást követ
- a hiba nagyságát az Gauss-eloszlás σ szórása jellemzi.

Ha modellillesztéskor nekünk csak egy-egy mért érték van a mérési pontokban, akkor ezekhez *becsült hiba* tartozik.

A normális, vagy Gauss-eloszlás



$\pm 3\sigma$-n belüli valószínűség: 99.6%

A mérési hiba kifejezése

Relatív hiba

- a hiba mértékét leosztjuk a mért értékkel:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

- megadható százalékban is
- nincsen mértékegysége

Abszolút hiba

- a hibát a valós értéktől való eltérésként adjuk meg:

$$\Delta y = y - y_0$$

- van mértékegysége
- az ábrára ezt rajzoljuk fel

Megismételt mérések hibája

Egy mérést N alkalommal, egymástól függetlenül elvégzünk. Hogy állapítjuk meg ebből a mérés hibáját?

A mért értékek:

$$y_1, y_2, ..., y_N$$

Megismételt mérések hibája

Egy mérést N alkalommal, egymástól függetlenül elvégzünk. Hogy állapítjuk meg ebből a mérés hibáját?

A mért értékek:

$$y_1, y_2, ..., y_N$$

Végeredményként a sok mérés átlagát tekintjük:

$$\langle y \rangle = \frac{\sum y_i}{N}$$

Megismételt mérések hibája

Egy mérést N alkalommal, egymástól függetlenül elvégzünk. Hogy állapítjuk meg ebből a mérés hibáját?

A mért értékek:

$$y_1, y_2, ..., y_N$$

Végeredményként a sok mérés átlagát tekintjük:

$$\langle y \rangle = \frac{\sum y_i}{N}$$

Ha ezt az eljárást N-szer megismételtjük és mindig kiszámoljuk az átlagot, akkor lesz egy eloszlásunk az átlagokra. Mit tekinthetünk az átlag hibájának?

Az átlag standard hibája

Ha egy mérést sokszor egymás után megismétlünk, valamint

- a mérések egymástól függetlenek,
- a hiba normális eloszlást követ, σ szórással

Az átlag standard hibája[3] a mérések számának gyökével csökken:

$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

[3] standard error of the mean (SEM)

Az átlag standard hibája

Ha egy mérést sokszor egymás után megismétlünk, valamint

- a mérések egymástól függetlenek,
- a hiba normális eloszlást követ, σ szórással

Az átlag standard hibája[3] a mérések számának gyökével csökken:

$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Levezetés: $y_1, y_2, ..., y_N$ független valószínűségi változók:
$\Rightarrow \mathrm{Var}(y_1 + y_2 + ... + y_N) = N\sigma^2$

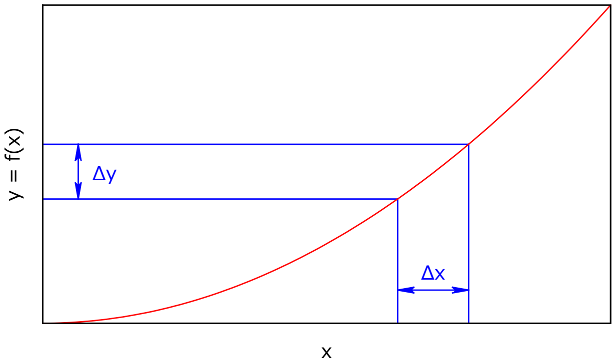
Ekkor a $M = (y_1 + y_2 + ... + y_N)/N$-nek a varianciája

$\mathrm{Var}(M) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$

[3]standard error of the mean (SEM)

Hibaterjedés

Adott egy mért x mennyiség, aminek ismerjük a Δx hibáját. Mekkora $y = f(x)$ hibája, ha f egy differenciálható függvény?



$$\Delta y = \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right| \Delta x$$

Hibaterjedés több változó esetén

Az x_i változók hibája normális eloszlású, melyet σ_x szórás jellemez. Mekkora lesz az $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ mennyiség hibája?

Hibaterjedés több változó esetén

Az x_i változók hibája normális eloszlású, melyet σ_x szórás jellemez. Mekkora lesz az $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ mennyiség hibája?

Ha $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ minden változójában differenciálható, akkor tekintsük f Taylor-sorát az x_i változók átlaga körül:

$$f - \langle f \rangle \approx \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \langle x_i \rangle) + ...$$

A szórás a Taylor-sor négyzete:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (x_i - \langle x_i \rangle)^2 + \\ &+ 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \end{aligned}$$

Hibaterjedés több változóra

A Taylor-sor négyzetében felfedezhetők a szórások és a kovarianciák kifejezései, vagyis:

$$\sigma_f^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\mathrm{cov}_{ij}$$

Példa: Két független változó $u = x + y$ összegének hibája:

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Példa: Két független változó $u = x \cdot y$ szorzatának hibája:

$$\sigma_u^2 = u^2\left(\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}\right)$$