Egyenesillesztés legkisebb négyzetekkel

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021. február 22.

Példa: egyenes illesztése

Egyváltozós adathalmaz

- $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(i)}$ mérési pontok, ezeknek nincs hibájuk
- $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(i)}$ mért értékek
- $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_i$ becsült hibák

Feladat: illesszünk a pontokra egyenest $\chi^2(\mathbf{a}; x^{(i)}, y^{(i)})$ költségfüggvény segítségével

- modell: $h(x; \mathbf{a}) = a + b \cdot x$
- a költségfüggvény:

$$\chi^2(\mathbf{a}; x^{(i)}, y^{(i)}) = \sum_i \left(\frac{y^{(i)} - a - bx^{(i)}}{\sigma_i} \right)^2$$

Milyen a és b mellett lesz χ^2 minimális?

Példa: egyenes illesztése

A minimumhelyen a parciális deriváltak eltűnnek:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_i \frac{y^{(i)} - a - bx^{(i)}}{\sigma_i^2} \\
0 &= \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_i \frac{x_i(y^{(i)} - a - bx^{(i)})}{\sigma_i^2}
\end{aligned}
$$

Megjegyzések:

- ez egy lineáris egyenletrendszer a-ra és b-re
- biztos, hogy megtaláljuk a minimumhelyet, mert χ^2 kifejezése pozitív kvadratikus függvénye a, b-nek.

Példa: egyenes illesztése

Jelölések:

$$S = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad S_x = \sum_i \frac{x^{(i)}}{\sigma_i^2} \qquad S_y = \sum_i \frac{y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

$$S_{xx} = \sum_i \frac{(x^{(i)})^2}{\sigma_i^2} \qquad S_{xy} = \sum_i \frac{x^{(i)} y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

Példa: egyenes illesztése

Jelölések:

$$S = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad S_x = \sum_i \frac{x^{(i)}}{\sigma_i^2} \qquad S_y = \sum_i \frac{y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

$$S_{xx} = \sum_i \frac{(x^{(i)})^2}{\sigma_i^2} \qquad S_{xy} = \sum_i \frac{x^{(i)} y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

Az új jelölésekkel az egyenletrendszer *a*-ra és *b*-re:

$$\begin{aligned} Sa + S_x b &= S_y \\ S_x a + S_{xx} b &= S_{xy} \end{aligned}$$

Példa: egyenes illesztése

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\Delta = S \cdot S_{xx} - S_x^2$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{\Delta} \\ b &= \frac{S \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{\Delta} \end{aligned}$$