Az Euler módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021. március 18.

Euler módszer

Tekintsük közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd Bevezetés I fóliák

Euler módszer

Tekintsük közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \ldots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd Bevezetés I fóliák

Ötlet:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Euler módszer

Tekintsük közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \ldots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd Bevezetés I fóliák

Ötlet:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Az n-ik lépésben:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \cdot \mathbf{f}(x_n, y_n)$$

Eközben a független változó is lép:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

A hiba kiszámítása

Egy $\mathbf{y}$ vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

A hiba kiszámítása

Egy $\mathbf{y}$ vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

- mivel az Euler módszer ennek csak az első két tagját adja meg, nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után ⇒ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

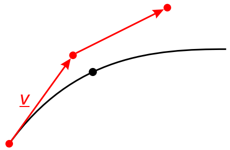
$$y_{n+1} = y(x + h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

- mivel az Euler módszer ennek csak az első két tagját adja meg, nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél
- a teljes számolás során $\sim 1/h$ lépés végzünk, ezért a globális hiba nem lehet kisebb $O(h)$-nál.

Az Euler-módszer hibája

Az Euler-módszer esetében a deriváltak értékét mindig a lépés elején vesszük

- ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek lesz valamekkora hibája
- idővel nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól



- ha a lépést felére csökkentjük, a hiba a negyedére csökken, de kétszer több lépésre van szükség

Példa: harmonikus oscillátor

Harmonikus oszcillátor: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$

Átírva elsőrendű egyenletek rendszerére:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{kx}{m} \\ \frac{dx}{dt} &= v \end{aligned}$$

Felírjuk az egyenletrendszer diszkretizált változatát

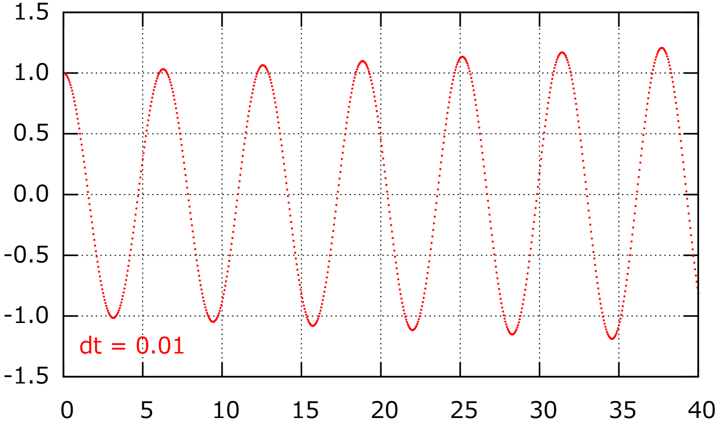
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \frac{k \cdot x_n}{m} \cdot \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Majd az idő léptetése

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

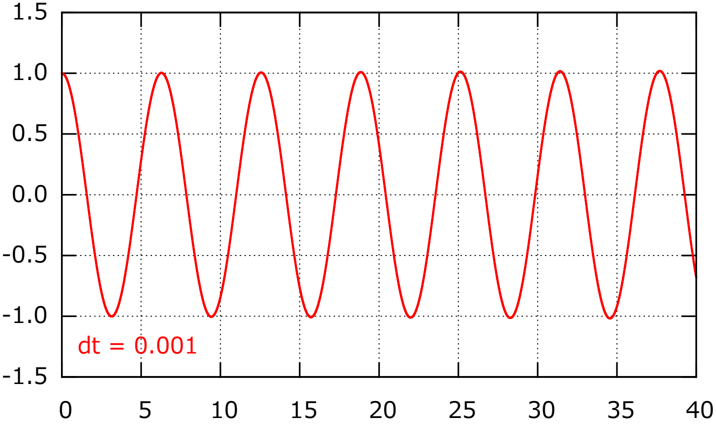
Itt most x és v felel meg a korábbi $\mathbf{y}$ vektor elemeinek, t a korábbi x független változónak és Δt a h lépésköznek.

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



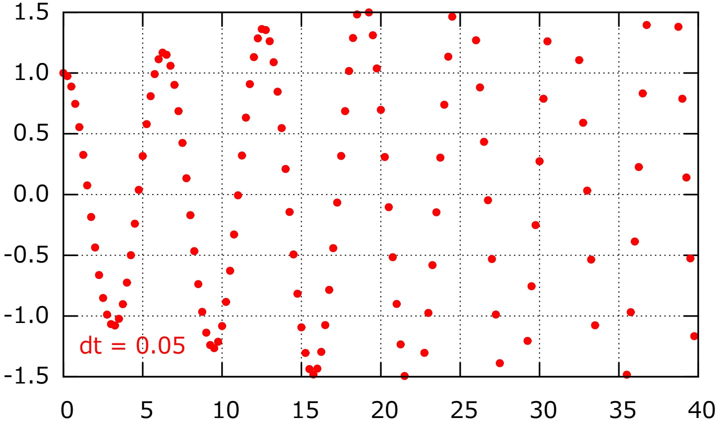
- Az oszcilláció amplitúdója időben lassan növekszik!

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t kisebbre vesszük, az oszcilláció amplitúdója az adott időtávon állandó

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t nagy, az oszcilláció amplitúdója gyorsan nő a számolásban

Energiamegmaradás

Az előző példában: harmonikus oszcillátor

- a test minden kilengéskor egy kicsit túllendült
- ez a módszer módszer pontatlansága miatt volt így
- a test minden kitéréskor plusz potenciális energiát nyert

Hamiltoni rendszerek szimulációjánál az energiamegmaradás alapkövetelmény!

- vannak módszerek, amelyek adott rendben megtartják az energiát
- ezek az ún. szimplektikus integrátorok
- vagy csökkentjük a hibát, hogy az az integrálási idő alatt elhanyagolható legyen

Az integrálási idő invertálhatósága

Visszafelé időfejlesztve a rendszert visszajutunk-e a kezdeti állapotba?

- ha nem disszipatív (pl nincs súrlódás), akkor elvileg igen
- megmarad az energia

Visszafelé léptetve egy diszkrét integrátort, visszajutunk-e az eredeti kiindulási pontba?

- egyszerű integrátorral általában nem
- a numerikus hibák összeadódnak
- kaotikus egyenleteknél pedig fel is erősödnek

Legegyszerűbb szimplektikus és invertálható integrátor: lásd a Leapfrog módszer fóliákat!