Interpoláció polinomokkal

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021. március 18.

Alapfeltevések

Az interpolálandó függvény *jól viselkedik*

- legyen folytonos, nincs ugrása két ismert pont között
- legyen sima: legyen differenciálható, és a deriváltjai is legyenek folytonosak

Ekkor valamilyen egyszerű függvény segítségével interpolálunk

- legegyszerűbb: lineáris
- általában: valamilyen alacsony rendű polinom

Vannak nehezen vagy egyáltalán nem interpolálható függvények

- pl. lökéshullámok hidrodinamikai szimulációkban (ugrásszerű változás a nyomásban, sűrűségben stb)

Lokális és globális interpoláció

Lokális interpoláció

- csak az x körüli k számú x_i pontot használjuk
- az interpoláció rendje $k - 1$

Globális interpoláció

- az összes ismert pontot felhasználjuk
- ez tulajdonképpen függvényillesztés
- a globális interpoláció rendje $N - 1$, ahol N az összes ismert pont száma

Interpolációs modell választása

A függvényalak az interpolálandó adatoktól függ

- folytonosan differenciálható-e?
- vannak-e pólusai?
- milyen sűrűn van mintavételezve?
- periodikus-e?
- meg kell-e tartani a görbe alatti integrál értékét?
- mekkora a számítási igény?

Az egyik legegyszerűbb: interpoláció polinommal

- hogyan határozhatjuk meg a polinom együtthatóit?

Lagrange-formula

- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$-et az ismert x_i és $y_i = f(x_i)$ értékekkel

Lagrange-formula

- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$-et az ismert x_i és $y_i = f(x_i)$ értékekkel

$$
\begin{aligned}
P(x) = \quad & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_k)}\cdot y_0 + \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_k)}\cdot y_1 + \ldots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdot(x_k-x_{k-1})}\cdot y_k
\end{aligned}
$$

- kielégíti a $P(x_i) = y_i$ egyenlőséget

Egyszerű példa: lineáris interpoláció (egyenes illesztés)

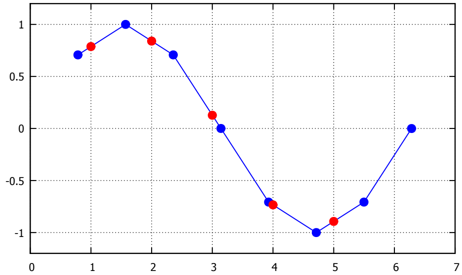


Figure: Kék pontok: eredeti adatok, piros pontok: kék pontok között lineáris interpolációval kapott értékek.

- lokálisan két pontot használunk az interpolációra

Interpolációs polinom együtthatói

Ha sok x pontban keressük az interpolálandó $f(x)$ függvény értékét:

- akkor jobb kiszámolni az interpolációs polinom együtthatóit
- majd behelyettesíteni a polinomba

Feladat:

- adottak az $x_1, x_2, ..., x_N$ pontok és $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_N = f(x_N)$ értékek
- az interpoláló polinomnak az összes (x_i, y_i) ponton át kell mennie
- Polinom fokszáma: $N - 1$, ahol N a pontok száma.

Egyenletrendszer a polinom c_i együtthatóira

$$y_1 = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 + ... + c_N x_1^{N-1}$$

$$y_2 = c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 + ... + c_N x_2^{N-1}$$

$$\vdots$$

$$y_N = c_1 + c_2 x_N + c_3 x_N^2 + ... + c_N x_N^{N-1}$$

Ezt kell megoldani a c_i polinom-együtthatókra. x_i-k ismertek.

Egyenletrendszer a polinom c_i együtthatóira

$$y_1 = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 + ... + c_N x_1^{N-1}$$

$$y_2 = c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 + ... + c_N x_2^{N-1}$$

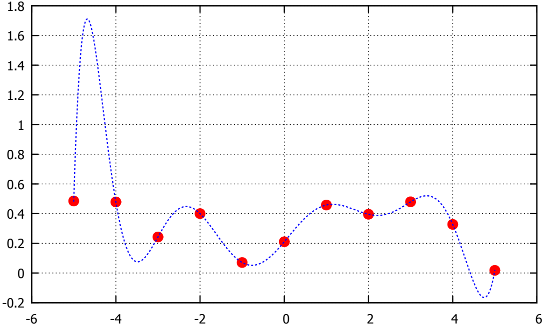
$$\vdots$$

$$y_N = c_1 + c_2 x_N + c_3 x_N^2 + ... + c_N x_N^{N-1}$$

Ezt kell megoldani a c_i polinom-együtthatókra. x_i-k ismertek.

- az x_i-k hatványaiból alkotott mátrix speciális (Vandermonde-mátrix)! Erre létezik speciális megoldó módszer
- de a Vandermonde-mátrixok többnyire numerikusan rosszul kondicionáltak

Magasfokú polinomok egy másik problémája



Együtthatók:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.0000\\
c_1 &= 0.0000\\
c_2 &= 0.0002\\
c_3 &= -0.0017\\
c_4 &= -0.0023\\
c_5 &= 0.0278\\
c_6 &= 0.0060\\
c_7 &= -0.1713\\
c_8 &= 0.0497\\
c_9 &= 0.3386\\
c_{10} &= 0.2109
\end{aligned}
$$

- több együttható is közel nulla
- a polinom egyes helyeken vadul oszcillál