Runge Kutta módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021. március 18.

Az Euler-módszer javítása: középponti módszer

Az Euler-módszer aszimmetrikus:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned}$$

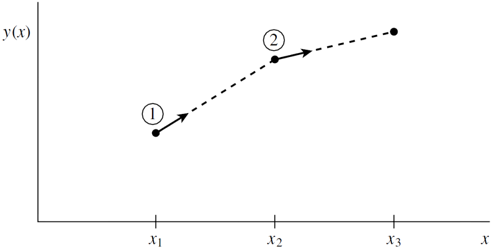
- megoldást egy h-val léptetjük, de a szükséges deriváltat mindig az x_n helyen, vagyis az intervallum elején számítjuk ki.

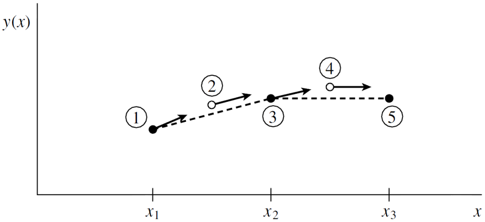
Javítsunk a módszeren:

- kiszámítjuk a deriváltat az intervallum elején
- teszünk egy fél lépést és az előző lépést használva kiszámoljuk a deriváltat egy középső pontban
- ezt használjuk a teljes lépésben

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 + O(h^3) \end{aligned}$$

Egyszerű Euler-lépés és a középponti módszer





A hiba további csökkentése: negyedrendű Runge–Kutta-módszer

A lépést több részlépésből előállítva bízhatunk abban, hogy a hiba tovább csökken.

Negyedrendű Runge–Kutta (RK4):

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h \cdot f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{1}{6}k_4 + O(h^5)
\end{aligned}
$$

A negyedrendű Runge–Kutta-módszer

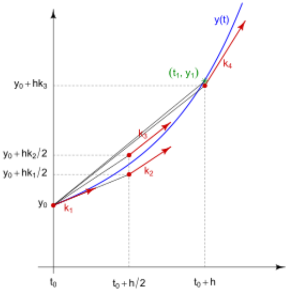


Figure: A függvény deriváltját négy pontban számoljuk ki: a kezdetiben, kétszer a lépéstávolság felénél és egyszer még a lépés végén. Wikipedia.

Módszerek összehasonlítása

	f kiértékeléseinek száma	hiba
Euler-módszer	1	$O(h^2)$
középponti módszer	2	$O(h^3)$
4-ed rendű Runge–Kutta	4	$O(h^5)$

A Runge–Kutta-módszer magasabb rendekre is általánosítható

- meddig érdemes elmenni?
- a több köztes pont mindig nagyobb pontosságot jelent? $\Rightarrow$ nem feltétlenül
- viszont több függvénykiértékeléssel jár

- az RK módszer egy általános, sokféle problémára alkalmazható módszer
- speciális feladatok esetén illetve ha a megoldásról van valami elótudás, akkor található ennél optimálisabb módszer is