

Adatmodellezés, függvényillesztés

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 07.

Elméleti modell ellenőrzése

Kísérlet:

- bizonyos *mennyiségeket mérünk*
- sokszor más mennyiségek függvényében, pl. az idő vagy hely

Problémák:

- az adatokat torzítás, zaj és mérési hiba terheli

Cél:

- ellenőrizni a fizikai törvény helyességét a mérési eredmények alapján
- megadni a konstansok és paraméterek értékét
- mennyire lehetünk abban bizonyosak, hogy a fizikai törvény valóban leírja a méréseket? Hogyan dönthetünk alternatív modellek között?

Fóliák:

- Mérési hiba, zaj
- Statisztikus hiba, hibaterjedés

Kérdés:

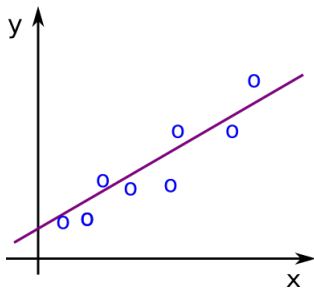
- adott egy $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}$ adathalmaz, $i = 1 \dots N$ mérési pontok
- erre szeretnék illeszteni egy $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ függvényt
- hogyan határozhatjuk meg a $\mathbf{a} = (a_0, a_1 \dots a_k)$ paramétervektort?
- hogyan számszerűsíthető, hogy mennyire illeszkedik jól a modell a mérésekhez?

Példa: egyenesillesztés $\Rightarrow h(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x$

Függvényillesztés

Intuíció:

- az a $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ írja le legjobban az adatokat, amelyekre a mért $y^{(i)}$ adat és a hipotézis $h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})$ értéke **átlagosan** a legkevésbe tér el
- $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ nem kell, hogy minden $y^{(i)}$ ponton átmenjen, csak az, hogy átlagosan kicsi legyen a különbség



Stratégia:

- definiálunk egy $\text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}))$ függvényt
- ez adja meg, hogy mennyire tér el az $y^{(i)}$ adattól a $h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})$ hipotézis
- definiáljuk a $J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ költségfüggvényt:

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}))$$

- adott $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ hipotézis (függvényalak) mellett az eltérés átlagosan akkor lesz a legkisebb, ha megkeressük a $J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ minimumát a $a_0, a_1 \dots a_k$ függvényében

$$\min_{\mathbf{a}} [J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})] = ?$$

- \Rightarrow függvény minimalizációs probléma

- milyen $\text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}))$ -t használjunk?
 - a legkisebb négyzetek módszer gyakran alkalmazott
 - másfajta költségfüggvény is létezik, lásd pl **logisztikus regresszió**
- milyen algoritmussal tudjuk megtalálni egy függvény minimumát vagy maximumát? (ezzel most nem foglalkozunk)

Kitekintés: [Függvényextrémum keresés](#) fóliák