

Differenciálegyenletek: bevezetés I.

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 28.

Differenciálegyenletek: olyan egyenletek, ahol

- a megoldást függvény alakjában keressük
- az egyenletben a függvény és deriváltjai szerepelnek
- adottak még kezdeti feltételek és határfeltételek

Példa: leejtett kő, homogén gravitációs térben:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Kezdeti feltételek:

$$x(t = 0) = x_0 \quad \text{kezdeti magasság}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \quad \text{kezdeti sebesség}$$

Változók száma szerint

- **közönséges:** egyváltozós, az $x = x(t)$ megoldás csak t -től függ

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

- **parciális differenciálegyenlet:** többváltozós, parciális deriváltak is szerepelnek

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2}$$

$\phi(x, t)$ függvény hely és időfüggő is

A *differenciálegyenlet rendje*

- az a legmagasabb derivált, ami szerepel az egyenletben

Az *elsőrendű* egyenletben legfeljebb első rendű derivált szerepel

Példa: az $I = I(x)$ fényintenzitás csökkenése fényelnyelő közegben:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -kx$$

A dinamikai törvények többsége lineáris *másodrendű* differenciálegyenlet

Példa: harmonikus oszcillátor

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

Lineáris vs. nem lineáris differenciálegyenlet

Lineáris differenciálegyenlet: ha az $x(t)$ és deriváltjai mind első hatványon szerepelnek

példa: harmonikus oszcillátor

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

Nem lineáris differenciálegyenlet: az $x(t)$ vagy deriváltjai magasabb hatványon

Példa: Navier–Stokes-egyenletek

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p$$

- sok fizikai folyamatot lineáris differenciálegyenletek írnak le
- de fontos példák vannak nemlineáris differenciálegyenletekre is
 - bizonyos növekedési folyamatok
 - folyadékáramlás
 - általános relativitáselmélet

Ha egyszerre több ismeretlen függvényünk is van, és ezekre több egyenletünk, akkor az egy differenciálegyenlet-rendszer.

- az egyenletek ugyanazoktól a változóktól függnek

Az egyenletrendszer általában csatolt

- ugyanaz a függvény több egyenletben is szerepel, pl:

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= t - t^2 z(t)\end{aligned}$$

Másodrendű (vagy akár magasabb rendű) egyenletek numerikus megoldása általában nem probléma, ha az egyenlet maga lineáris.

Megoldás menete: átírjuk az egyenletet elsőrendű egyenletek rendszerére, és azokat párhuzamosan integráljuk.

Példa: rugó egyenlete

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k \frac{x(t)}{m}$$

Átírva:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k \frac{x(t)}{m}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

Az általános probléma: N darab egyenlet rendszere

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

- az f_i függvények tetszőlegesek, de nem tartalmazzák az y_i -k deriváltjait.
- kezdeti feltételek: $y_i(x = x^{(0)}) = y_i^{(0)}$

Az általános probléma: N darab egyenlet rendszere

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

- az f_i függvények tetszőlegesek, de nem tartalmazzák az y_i -k deriváltjait.
- kezdeti feltételek: $y_i(x = x^{(0)}) = y_i^{(0)}$

$y_i(x)$ -t és $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$ -t egy vektor elemeinek tekintjük

Vektoros írásmód: $y_i(x) \rightarrow \mathbf{y}(x)$, $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N) \rightarrow \mathbf{f}(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = \mathbf{f}(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$$