

# Egyenesílesztés legkisebb négyzetekkel

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 07.

# Példa: egyenes illesztése

Egyváltozós adathalmaz

- $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)}$  mérési pontok, ezeknek nincs hibájuk
- $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(i)}$  mért értékek
- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$  becsült hibák

Feladat: illesszünk a pontokra egyenest  $\chi^2(\mathbf{a}; x^{(i)}, y^{(i)})$  költségfüggvény segítségével

- modell:  $h(x; \mathbf{a}) = a + b \cdot x$
- a költségfüggvény:

$$\chi^2(\mathbf{a}; x^{(i)}, y^{(i)}) = \sum_i \left( \frac{y^{(i)} - a - bx^{(i)}}{\sigma_i} \right)^2$$

Milyen  $a$  és  $b$  mellett lesz  $\chi^2$  minimális?

## Példa: egyenes illesztése

A minimumhelyen a parciális deriváltak eltűnnek:

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_i \frac{y^{(i)} - a - bx^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_i \frac{x_i(y^{(i)} - a - bx^{(i)})}{\sigma_i^2}$$

Megjegyzések:

- ez egy lineáris egyenletrendszer  $a$ -ra és  $b$ -re
- biztos, hogy megtaláljuk a minimumhelyet, mert  $\chi^2$  kifejezése pozitív kvadratikus függvénye  $a$ ,  $b$ -nek.

# Példa: egyenes illesztése

Jelölések:

$$S = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \quad S_x = \sum_i \frac{x^{(i)}}{\sigma_i^2} \quad S_y = \sum_i \frac{y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

$$S_{xx} = \sum_i \frac{(x^{(i)})^2}{\sigma_i^2} \quad S_{xy} = \sum_i \frac{x^{(i)}y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

## Példa: egyenes illesztése

Jelölések:

$$S = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \quad S_x = \sum_i \frac{x^{(i)}}{\sigma_i^2} \quad S_y = \sum_i \frac{y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

$$S_{xx} = \sum_i \frac{(x^{(i)})^2}{\sigma_i^2} \quad S_{xy} = \sum_i \frac{x^{(i)}y^{(i)}}{\sigma_i^2}$$

Az új jelölésekkel az egyenletrendszer  $a$ -ra és  $b$ -re:

$$\begin{aligned} Sa + S_x b &= S_y \\ S_x a + S_{xx} b &= S_{xy} \end{aligned}$$

## Példa: egyenes illesztése

Az egyenletrendszer determinánása:

$$\Delta = S \cdot S_{xx} - S_x^2$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{\Delta}$$

$$b = \frac{S \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{\Delta}$$