

Az Euler módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 28.

Tekintsük közösleges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd [Bevezetés I](#) fóliák

Tekintsük közöséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd [Bevezetés I](#) fóliák

Ötlet:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a dx differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h -val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_i)$$

Diszkrétizálás után az n -ik lépésben:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \cdot \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

A y vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkrétén számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után \Rightarrow *lokális hiba*

A y vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkrétén számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után \Rightarrow *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \dots$$

A y vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkrétén számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után \Rightarrow *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \dots$$

- az Euler módszer ennek az első két tagját adja meg \Rightarrow nem lehet pontosabb $O(h^2)$ -nél

A y vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkrétén számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után \Rightarrow *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

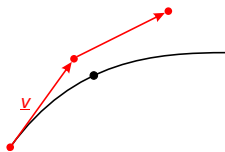
$$y_{n+1} = y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \dots$$

- az Euler módszer ennek az első két tagját adja meg \Rightarrow nem lehet pontosabb $O(h^2)$ -nél
- a teljes számolás során $\sim 1/h$ lépés \Rightarrow a globális hiba nem lehet kisebb $O(h)$ -nál.

Az Euler-módszer hibája

Az Euler-módszer esetében a deriváltak értékét mindig a lépés elején vesszük

- ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek lesz valamekkora hibája
- idővel nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól



- ha a lépést felére csökkentjük, a hiba a negyedére csökken, de kétszer több lépésre van szükség

Példa: harmonikus oszcillátor

Harmonikus oszcillátor: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{kx(t)}{m}$

Átírva elsőrendű egyenletek rendszerére:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{kx}{m} \\ \frac{dx}{dt} &= v\end{aligned}$$

Jelölés: x és v felel meg a korábbi y vektor elemeinek, t a x független változónak és Δt a h lépésköznek.

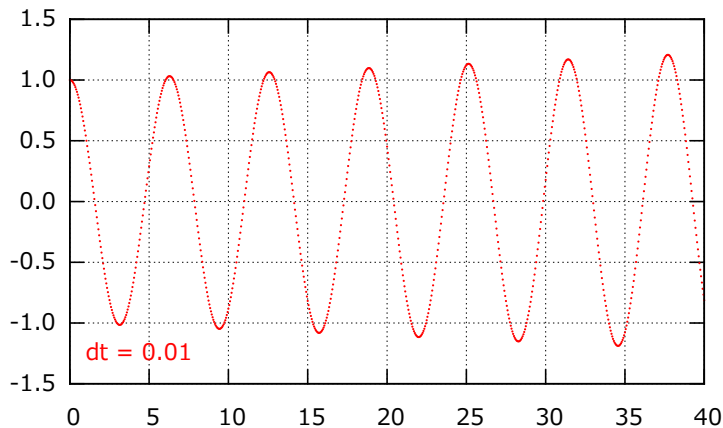
Diszkrétizálva:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n - \frac{k \cdot x_n}{m} \cdot \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Majd az idő léptetése

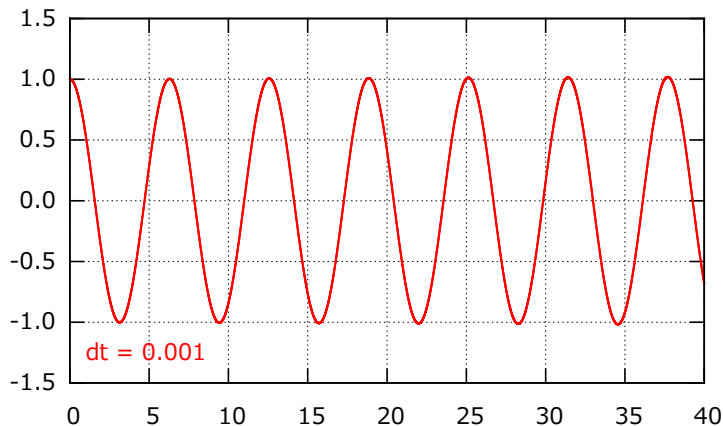
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



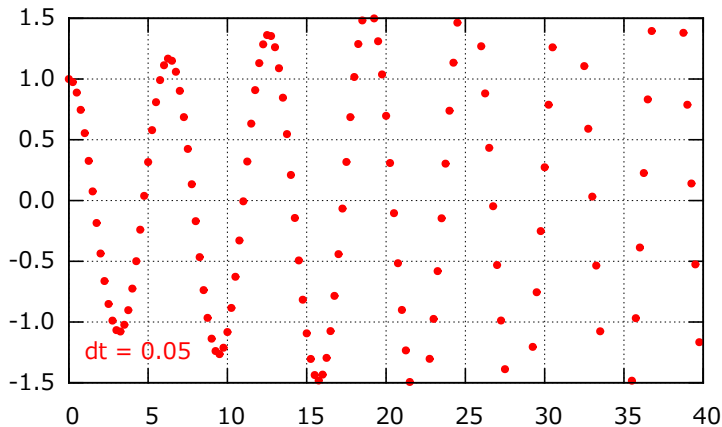
- Az oszcilláció amplitúdója időben lassan növekszik!

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt -t kisebbre vesszük, az oszcilláció amplitúdója az adott időtávon állandó

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt -t nagy, az oszcilláció amplitúdója gyorsan nő a számolásban

Az előző példában: harmonikus oszcillátor

- a test minden kilengéskor egy kicsit túllendült
- ez a módszer módszer pontatlansága miatt volt így
- a test minden kitéréskor plusz potenciális energiát nyert

Hamiltoni rendszerek szimulációjánál az energiamegmaradás alapkövetelmény!

- vannak módszerek, amelyek adott rendben megtartják az energiát \Rightarrow ún. szimplektikus integrátorok
- vagy csökkentjük a hibát, hogy az integrálási idő alatt elhanyagolható legyen

Visszafelé időfejlesztve a rendszert visszajutunk-e a kezdeti állapotba?

- ha nem disszipatív (pl nincs súrlódás), akkor elvileg igen
- megmarad az energia

Visszafelé léptetve egy diszkrét integrátort, visszajutunk-e az eredeti kiindulási pontba?

- egyszerű integrátorral általában nem
- a numerikus hibák összeadódnak
- kaotikus egyenleteknél pedig fel is erősödnek

Legegyszerűbb szimplektikus és invertálható integrátor: lásd a [Leapfrog módszer](#) fóliákat!