Interpoláció 2 dimenzióban

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Interpoláció több dimenzióban, rácson, rács nélkül

Kétdimenziós esetet tárgyaljuk, magasabb dimenziókra általánosítható.

Szabályos rácson:

- a rácspontok indexelhetők x_i, y_j módon, $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$
- a függvényértékek: $z(x_i, y_j)$
- szabályos rács: két rácsvektor definiálja, de nem muszáj, hogy négyzetrács legyen.

Ha az ismert pontok elszórtan helyezkednek el:

- bonyolultabb az interpoláció, pl. Delaunay-háromszögelés

Interpolálás kétdimenziós rácson

Keressük az $z(x, y)$ függvényértéket, ahol

- $x_i < x < x_{i+1}$ és $y_i < y < y_{i+1}$
- az (x, y) pont tehát négy rácspont által definiált cellába esik

Visszavezetjük a problémát a lineáris esetre:

- Interpoláljunk először az egyik index szerint:
  $z(x, y_i)$-t becsüljük $z(x_i, y_i)$ és $z(x_{i+1}, y_i)$-ből, és
  $z(x, y_{i+1})$-t becsüljük $z(x_i, y_{i+1})$ és $z(x_{i+1}, y_{i+1})$-ből.
- Majd a másik irányban:
  $z(x, y)$-t becsüljük $z(x, y_i)$ és $z(x, y_{i+1})$-ből
- újrahasznosíthatók az egy dimenziós módszerek

Interpoláció rácson, koordináták mentén

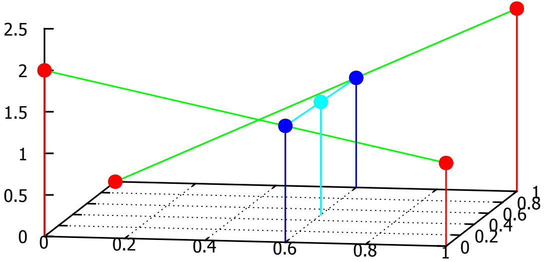

Figure: $z(0.6, 0.5)$ érték meghatározása egydimenziós interpolálások segítségével.

Bilineáris interpoláció

Jelölés

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad u = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}$$

Ebből a függvény interpolált $z(x, y)$ értéke:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= (1-t)(1-u)z_{i,j} + t(1-u)z_{i+1,j} + \\ &+ (1-t)uz_{i,j+1} + tuz_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

- ez lineáris kifejezés, de nem egyszerűen egy sík (ahhoz 3 pont is elég)
- síknál általánosabb, "nyeregfelület" is lehet

Bilineáris interpoláció

Jelölés

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad u = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}$$

Ebből a függvény interpolált $z(x, y)$ értéke:

$$\begin{aligned} z(x,y) &= (1-t)(1-u)z_{i,j} + t(1-u)z_{i+1,j} + \\ &+ (1-t)uz_{i,j+1} + tuz_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

- ez lineáris kifejezés, de nem egyszerűen egy sík (ahhoz 3 pont is elég)
- síknál általánosabb, "nyeregfelület" is lehet

Fontos tulajdonságok:

- négy rácspont által meghatározott cellák között az interpolált függvény folytonosan változik
- de a gradiense nem folytonos a cellák határán

Bilineáris interpoláció

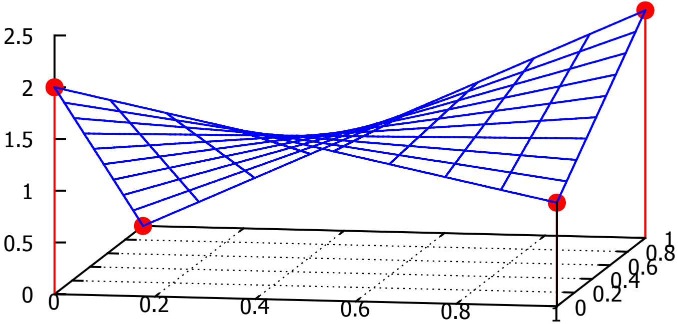

Figure: Bilineáris interpolációval kapható felület

Interpoláció két dimenzióban folytonos deriváltakkal

Két módszer, melyek nem függetlenek egymástól

- bi-köbös interpoláció
- köbös spline-ok 2D-ben

Bi-köbös interpoláció

- ki kell róni feltételeket az első deriváltakra és a vegyes deriváltakra is
- minden pontban szükséges a deriváltak értékének explicit megadása:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- honnan vegyük a deriváltak értékét? analitikus alak v. numerikus differenciálás
- a deriváltak értékétől függetlenül a felület sima lesz, de nem garantált, hogy jól közelíti a függvényt
- csak akkor lesz jó az interpoláció, ha a deriváltakat is jól tudjuk számolni

Interpoláció szétszórt pontok esetén

Most a pontok már nem rácson helyezkednek el

- korábban egy (x, y) pont körül éppen négy környező pont volt
- nem egyértelmű, mi a legjobb választás a "környező pontok"-ra
- a korábbbi módszerek nem működnek

Egy lehetséges megoldás:

- minden pontból húzzunk szakaszokat a környező pontokba úgy, hogy háromszögeket kapjunk
- van olyan "háromszögelés" (trianguláció), ami egyértelmű
- interpoláljuk a függvényt a háromszög csúcsain felvett értékek segítségével

$\Rightarrow$ *Delaunay trianguláció, Voronoi csempézés*