

Interpoláció polinomokkal

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 28.

Az interpolálandó függvény *jól viselkedik*

- legyen folytonos, nincs ugrása két ismert pont között
- legyen sima: legyen differenciálható, és a deriváltjai is legyenek folytonosak

Ekkor valamilyen egyszerű függvény segítségével interpolálunk

- legegyszerűbb: lineáris
- általában: valamilyen alacsony rendű polinom

Vannak nehezen vagy egyáltalán nem interpolálható függvények

- pl. lökeshullámok hidrodinamikai szimulációkban (ugrásszerű változás a nyomásban, sűrűségben stb)

Lokális és globális interpoláció

Lokális interpoláció

- csak az x körüli k számú $x^{(i)}$ pontot használjuk
- az interpoláció rendje $k - 1$

Globális interpoláció

- az összes ismert pontot felhasználjuk
- ez tulajdonképpen függvényillesztés
- a globális interpoláció rendje $N - 1$, ahol N az összes ismert pont száma

Interpolációs modell választása

A függvényalak az interpolálandó adatoktól függ

- folytonosan differenciálható-e?
- vannak-e pólusai?
- milyen sűrűn van mintavételezve?
- periodikus-e?
- meg kell-e tartani a görbe alatti integrál értékét?
- mekkora a számítási igény?

Az egyik legegyszerűbb: **interpoláció polinommal**

- hogyan határozhatjuk meg a polinom együtthatóit?

Lagrange-formula

- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$ -et az ismert $x^{(i)}$ és $y^{(i)} = f(x^{(i)})$ értékekkel

Lagrange-formula

- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$ -et az ismert $x^{(i)}$ és $y^{(i)} = f(x^{(i)})$ értékekkel

Jelölváltás: $x^{(i)} \rightarrow x_i, y^{(i)} \rightarrow y_i$

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_k)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_k)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_k)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_2 - x_k)} \cdot y_1 + \dots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdot (x_k - x_{k-1})} \cdot y_k \end{aligned}$$

- kielégíti a $P(x_i) = y_i$ egyenlőséget

Egyszerű példa: lineáris interpoláció (egyenes illesztés)

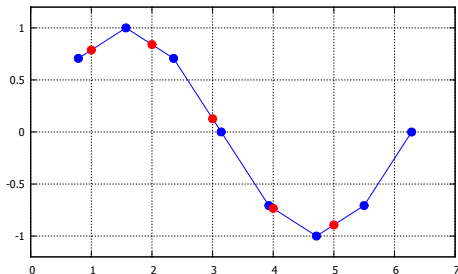


Figure: Kék pontok: eredeti adatok, piros pontok: kék pontok között lineáris interpolációval kapott értékek.

- lokálisan két pontot használunk az interpolációra

Interpolációs polinom együtthatói

Ha sok x pontban keressük az interpolálandó $f(x)$ függvény értékét:

- akkor jobb kiszámolni az interpolációs polinom együtthatóit
- majd behelyettesíteni a polinomba

Feladat:

- adottak az x_1, x_2, \dots, x_N pontok és $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_N = f(x_N)$ értékek
- az interpoláló polinomnak az összes (x_i, y_i) ponton át kell mennie
- Polinom fokszáma: $N - 1$, ahol N a pontok száma.

Egyenletrendszer a polinom c_i együtthatóira

$$y_1 = c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + \dots + c_Nx_1^{N-1}$$

$$y_2 = c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + \dots + c_Nx_2^{N-1}$$

⋮

$$y_N = c_1 + c_2x_N + c_3x_N^2 + \dots + c_Nx_N^{N-1}$$

Ezt kell megoldani a c_i polinom-együtthatókra. x_i -k ismertek.

Egyenletrendszer a polinom c_i együtthatóira

$$y_1 = c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + \dots + c_Nx_1^{N-1}$$

$$y_2 = c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + \dots + c_Nx_2^{N-1}$$

\vdots

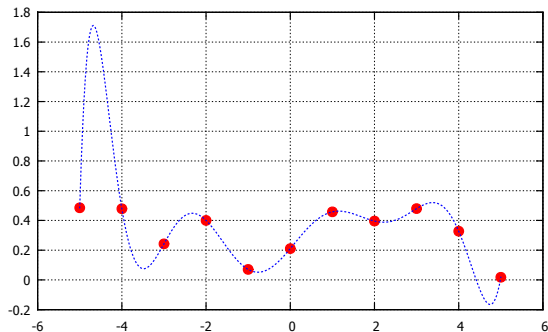
$$y_N = c_1 + c_2x_N + c_3x_N^2 + \dots + c_Nx_N^{N-1}$$

Ezt kell megoldani a c_i polinom-együtthatókra. x_i -k ismertek.

- az x_i -k hatványaiból alkotott mátrix speciális (Vandermonde-mátrix)! Erre létezik speciális megoldó módszer
- de a Vandermonde-mátrixok többnyire numerikusan rosszul kondicionáltak

Magasfokú polinomok egy másik problémája

Együtthatók:



c_0	=	0.0000
c_1	=	0.0000
c_2	=	0.0002
c_3	=	-0.0017
c_4	=	-0.0023
c_5	=	0.0278
c_6	=	0.0060
c_7	=	-0.1713
c_8	=	0.0497
c_9	=	0.3386
c_{10}	=	0.2109

- több együttható is közel nulla
- a polinom egyes helyeken vadul oszcillál