Interpoláció köbös spline-nal

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 28.

Bevezetés

Két pont között a legegyszerűbb interpolációs függvény az egyenes:

$$y(x) = A(x)y_j + B(x)y_{j+1},$$

ahol

$$A(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad B(x) = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

Ez kijön a Lagrange-formulából

Bevezetés

Két pont között a legegyszerűbb interpolációs függvény az egyenes:

$$y(x) = A(x)y_j + B(x)y_{j+1},$$

ahol

$$A(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad B(x) = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

Ez kijön a Lagrange-formulából

Probléma:

- A második deriváltja az x_j pontokban nem meghatározott

Köbös spline (cubic spline)

Előírjuk, hogy az ismert x_j pontokban az interpoláló $f(x)$ függvény sima legyen, azaz

- létezzen a második deriváltja, és az legyen folytonos
- ebből következik, hogy az első deriváltja is folytonos.

Az egyértelmű megoldás kedvéért határfeltételeket is elő kell írni az x_1 és x_N pontokban. Ilyen lehet pl.

- az interpoláció második deriváltja nulla az interpolációs intervallum két végén, vagy
- az interpoláció első deriváltja meghatározott értéket vesz az interpolációs intervallum végén

Köbös spline

A harmadfokú spline formulája:

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy_j'' + Dy_{j+1}'',$$

ahol

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \qquad B = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

a lineáris interpolációnál látottak, továbbá

$$C = \tfrac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$D = \tfrac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2$$

Köbös spline

Ellenőrzés:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ay_j'' + By_{j+1}''$$

Az $A \equiv A(x)$ és $B \equiv B(x)$ konkrét alakját felhasználva:

- $x = x_j$ esetén $\frac{d^2y}{dx^2} = y_j''$ és $x = x_{j+1}$ esetén $\frac{d^2y}{dx^2} = y_{j+1}''$
- a második derivált folytonos a két intervallum, pl (x_{j-1}, x_j) és (x_j, x_{j+1}) határán

Hogyan határozzuk meg az y_j'' értékét?

Köbös spline

y''_j értékének meghatározása:

- az (x_{j-1}, x_j) és (x_j, x_{j+1}) intervallumok határán a $\frac{dy}{dx}$ első derivált legyen folytonos!

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} y''_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} y''_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} y''_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

- ez összesen $N-2$ egyenlet az N db ismeretlen y''_j-re
- határfeltétel: $y''_1 = y''_N = 0$ vagy az első deriváltra feltétel

y_j'' számolása

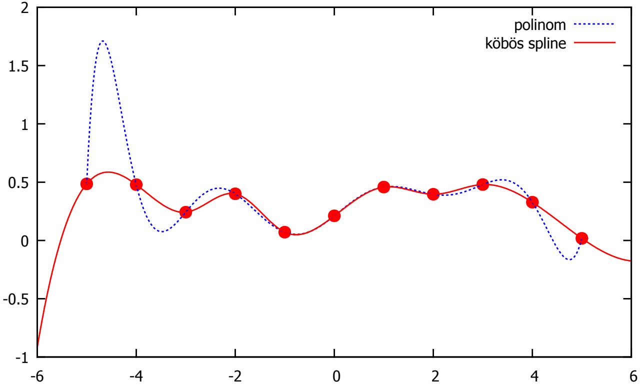
A probléma egy **tridiagonális** lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$
\begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & & & \\
0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & & & \\
 & & & & \dots & & & \\
 & & & & \dots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\
 & & & & \dots & 0 & a_N & b_M
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ \dots \\ y_{M-1}'' \\ y_M''
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{M-1} \\ d_M
\end{pmatrix}
$$

Megoldás:

- lineáris egyenletrendszer megoldó rutinok
- a speciális alak miatt pl LU dekompozíció, ez összesen $O(M)$ műveletet igényel
- nem kell az egész $M \times M$ mátrixot tárolni, elég a három átlót pl három vektorban

A spline-ok jobbak, mint a polinomok



- A pontok között a köbös spline jól viselkedik
- Extrapolációra ez sem sokkal jobb