

Példák nemlineáris függvényillesztésre

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 7.

Nemlineáris függvényillesztés

A $\chi^2(\mathbf{a}; x^{(i)}, y^{(i)})$ definíció szerint:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y^{(i)} - h(x^{(i)}; \mathbf{a})]^2}{\sigma_i^2},$$

Ezt szeretnénk minimalizálni \Rightarrow

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_j} = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \left[\frac{h(x; \mathbf{a}) - y^{(i)}}{\sigma_i^2} \cdot \frac{\partial h(x; \mathbf{a})}{\partial a_j} \Bigg|_{x=x_i} \right] = 0$$

- ha $h(x; \mathbf{a})$ az \mathbf{a} paraméterektől nem függő függvények lineárkombinációjaként állt elő, akkor a probléma lineáris volt.

Nemlineáris függvényillesztés

1. példa: mérési hiba nem csak a mért $y^{(i)}$ értékekben, hanem a $x^{(i)}$ mérési pontokban is van

Tegyük fel, hogy ilyen mérési eredményekre akarunk egyenest illeszteni. A költségfüggvény:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y^{(i)} - a - bx^{(i)})^2}{\sigma_{y,i}^2 + b^2\sigma_{x,i}^2}$$

Nemlineáris függvényillesztés

1. példa: mérési hiba nem csak a mért $y^{(i)}$ értékekben, hanem a $x^{(i)}$ mérési pontokban is van

Tegyük fel, hogy ilyen mérési eredményekre akarunk egyenest illeszteni. A költségfüggvény:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y^{(i)} - a - bx^{(i)})^2}{\sigma_{y,i}^2 + b^2 \sigma_{x,i}^2}$$

A $\frac{\partial \chi^2(a,b)}{\partial a} = 0$ egyenlet lineáris a -ban, de a $\frac{\partial \chi^2(a,b)}{\partial b} = 0$ egyenlet nemlineáris b -ben

Nemlineáris függvényillesztés

2. példa: Breit-Wigner formula a rezonáns szórás mérési eredményeinek kiértékelésére

$$f(E) = \frac{f_r}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4}$$

E energia, ennek függvényében mérjük a szórást. f_r , E_r , Γ ismeretlen paraméterek, ezeket szeretnénk meghatározni

Másik példa: Fano rezonancia

$$f(E) = \frac{(q\Gamma/2 + (E - E_r))^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4}$$

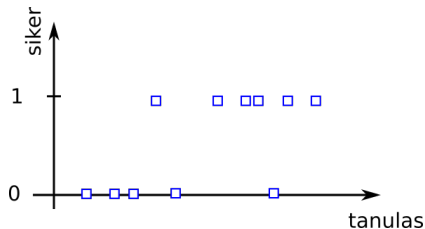
q , E_r , Γ paraméterek

$\frac{\partial \chi^2}{\partial (\text{paraméterek})} = 0$ nemlineáris egyenletek a paraméterekre

Nemlineáris függvényillesztés

3. példa: Klasszifikációs problémák

- az $y^{(i)}$ csak néhány diszkrét értéket vehet fel



- ha a tanulással x_{sajat} időt töltünk, akkor a korábbi adatok alapján az $y = 1$ (sikeres vizsga) vagy a $y = 0$ (sikertelen vizsga) a valószínűbb?

Nemlineáris függvényillesztés

3. példa: Klasszifikációs problémák: mi legyen a hipotézis?

- válasszunk olyan $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ függényt, amely a valós számokat leképezi a $(0, 1)$ intervallumra
- ilyen pl az ún *sigmoid függvény* (*logisztikus függvény*):

$$h(\mathbf{x}; \mathbf{a}) := g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})}}$$

- legegyszerűbb eset: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_0 + a_1 x$

