

Paraméterek hibájának becslése II.

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 7.

A paraméterek hibájának becslése más módon

A paraméterek hibájának becslése:

- ha a modell analitikusan ismer: Hesse-mátrix
- Egy jellegében más módszer: Monte Carlo módszerek
 - új “mérési eredményeket” szimulálunk és vizsgáljuk az illesztett paraméterek stabilitását

A paraméterek hibájának becslése más módon

A paraméterek hibájának becslése:

- ha a modell analitikusan ismer: Hesse-mátrix
- Egy jellegében más módszer: Monte Carlo módszerek
 - új “mérési eredményeket” szimulálunk és vizsgáljuk az illesztett paraméterek stabilitását

Két egyszerűbb módszer:

- Jackknife módszer
- Bootstrapping

Jackknife¹ módszer

Tekintsük a mérési pontokat, de minden lépésben hagyjunk ki egyet az illesztésből

- hagyjuk ki az i . pontot
- illesszük a modellt $N - 1$ pontra
- legyen az illesztett paraméterek vektora \mathbf{a}_i

Minden egyes mérési pontra megismételve összesen N különböző paramétervektort kapunk

- ezek átlaga lesz a becsült paramétervektor

$$\mathbf{a}_{\text{jack}} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{a}_i$$

- ezek szórása az illesztett paraméterek standard hibája

$$\sigma_{\text{jack}}^2 = \frac{N-1}{N} \sum_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{\text{jack}})^2$$

¹jackknife = bicska

Főbb lépések:

- jelöljük az eredeti, N db adatot tartalmazó adathalmazt \mathcal{D}_0 -val
- a \mathcal{D}_0 segítségével meghatározzuk a \mathbf{a}_0 paramétereket
- \mathcal{D}_0 segítségével új, szintetikus adathalmazokat generálunk:
 $\mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \dots$ ("S": synthetic).
- minden $\mathcal{D}_i^{(S)}$ segítségével kiszámoljuk az $\mathbf{a}_i^{(s)}$ illetett paramétervektort
- $\mathbf{a}_i^{(s)}$ segítségével kapunk egy eloszlást az illetett paraméterekre
- az $\mathbf{a}_i^{(s)}$ eloszlása \mathbf{a}_0 körül jelzi, hogy mekkora hibával tudjuk \mathbf{a}_0 -t meghatározni
- pl ha $\mathbf{a}_i^{(s)}$ eloszlása \mathbf{a}_0 körül nagyon keskeny, akkor kicsi \mathbf{a}_0 hibája

Hogyan kapjuk meg $\mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \dots$ -t ?

- véletlenszerűen kiválasztunk N adatot \mathcal{D}_0 -ból, úgy, hogy minden választás után “visszahelyezzük” a kiválasztott adatot \mathcal{D}_0 -ba
- $\Rightarrow \mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \dots$ -ben egyes adatok esetleg többször is szerepelhetnek

További részletek: *Numerical Recipes*

Konfidencia tartomány

A bootstrapping-gal kapunk egy M -dimenziós eloszlást az \mathbf{a} paramétervektorra

- pl kétdimenziós \mathbf{a} esetén $\mathbf{a}_i^{(s)} = (a_{(i)0}^{(s)}, a_{(i)1}^{(s)})$
- ezzel ki tudjuk számolni a $\mathbf{a}_i^{(s)} - \mathbf{a}_0$ értékeket \Rightarrow egy-egy pont a síkban
- ezek után meghatározhatunk egy tartományt, amelyben bizonyos valószínűséggel található:
 - az egyik paraméter, pl $a_{(0)0}$, függetlenül a másiktól ($a_{(0)1}$)
 - a két paraméter együttesen ($a_{(0)0}, a_{(0)1}$)

konfidencia tartomány: az a tartomány, amely adott valószínűséggel (pl 95%) tartalmazza a paramétervektort vagy annak egy elemét

Konfidencia tartomány

Kétdimenziós példa:

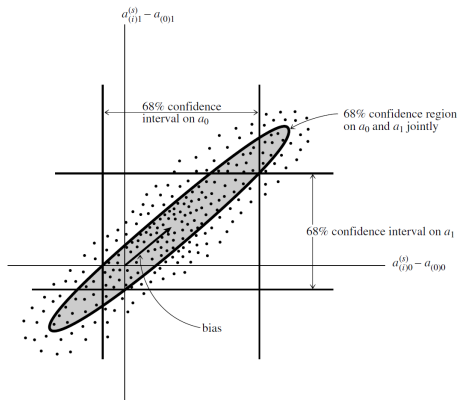


Figure: A szimulált paraméterértékek 68% van a függőleges illetve vízszintes vonalakkal jelzett intervallumban. $a_{(0)0}$, $a_{(0)1}$: az eredeti adathalmaz segítségével kapott értékek . ábra: Numerical Recipes.

További fontos kérdések

A paraméterek meghatározásával még nem ért véget a feladat:

- mekkora a meghatározott paraméterek hibája? ✓
- egyáltalán mennyire jó a modell? Hiába kicsi a meghatározott paraméterek hibája, ha rossz a modell, amit használunk