Mérések statisztikus hibája, hibaterjedés

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022. február 7.

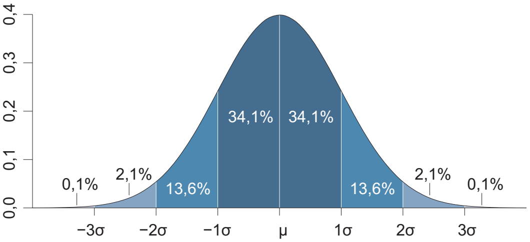
A méréseket terhelő statisztikus hiba miatt ugyanolyan feltételek mellett elvégzett megismételt méréskor (kicsit) más értéket mérünk: $y^{(i)}$, i mérés sorszáma

- $y^{(i)}$-k a mérésben valamilyen $P(y^{(i)})$ valószínűséggel fordulnak elő
- a $P(y^{(i)})$ valószínűség eloszlása megismételt mérésekkel elvileg megbecsülhető
- a mérési hibáról magáról is felteszünk valamit, ez is a modell része
- ha $P(y^{(i)})$ normális eloszlásnak felel meg, akkor a mérési hibának a σ szórás vehető

A statisztikus hiba eloszlása

Ha a mérési hiba *sok független* valószínűségi változó *átlagaként* áll elő:

- akkor érvényes rá a centrális határeloszlás tétel, azaz
- a hiba eloszlása Gauss-eloszlást követ
- a hiba nagyságát az Gauss-eloszlás σ szórása jellemzi.



$\pm 3\sigma$-n belüli valószínűség: 99.6%

Megismételt mérések hibája

Egy mérést N alkalommal, egymástól függetlenül elvégzünk:
$y^{(1)}, y^{(2)}, ... y^{(N)}$

Végeredményként a sok mérés átlagát tekintjük:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y^{(i)}}{N}$$

Megismételt mérések hibája

Egy mérést N alkalommal, egymástól függetlenül elvégzünk:
$y^{(1)}, y^{(2)}, ... y^{(N)}$

Végeredményként a sok mérés átlagát tekintjük:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y^{(i)}}{N}$$

Ha ezt az eljárást N-szer megismételjük és mindig kiszámoljuk az átlagot, akkor lesz egy eloszlásunk az átlagokra. Mit tekinthetünk az átlag hibájának?

Az átlag standard hibája

Ha egy mérést sokszor egymás után megismétlünk, valamint

- a mérések egymástól függetlenek,
- a hiba normális eloszlást követ, σ szórással

Az átlag standard hibájaa mérések számának gyökével csökken:

$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Az átlag standard hibája

Ha egy mérést sokszor egymás után megismétlünk, valamint

- a mérések egymástól függetlenek,
- a hiba normális eloszlást követ, σ szórással

Az átlag standard hibájaa mérések számának gyökével csökken:

$$SEM = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Bizonyítás: $y^{(1)}, y^{(2)}, ...y^{(N)}$ független valószínűségi változók, normális eloszlással
Variancia: $\langle (y^{(i)} - \bar{y})^2 \rangle = \sigma^2$, $\langle \dots \rangle$ várható érték

$\Rightarrow \mathrm{Var}(y^{(1)} + y^{(2)} + .. + y^{(N)}) = N\sigma^2$

Ekkor a $M = (y^{(1)} + y^{(2)} + .. + y^{(N)})/N$-nek a varianciája:
$\mathrm{Var}(M) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$

Hibahatárok

Egy mért y mennyiség hibája Δy

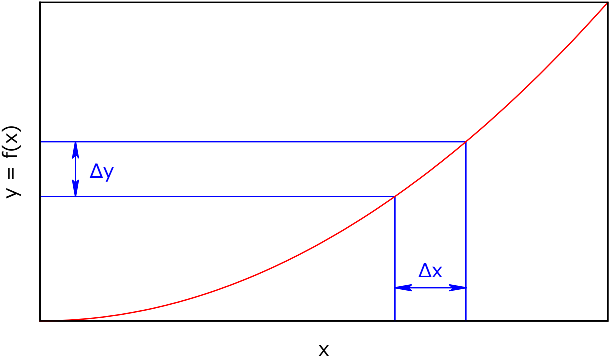
- szimmetrikus esetben az abszolút hibát egy szám jellemzi, $y \pm \Delta y$
- van mértékegysége
- az ábrára ezt rajzoljuk fel
- ha a hiba nem Gauss eloszlású, akkor előfordulhat, hogy nem szimmetrikus.
- ilyen esetben külön megadható az alsó és a felső hibahatár: $y^{+\Delta_1}_{-\Delta_2}$

Megadható még az ún **relatív hiba**

- a hiba mértékét leosztjuk a mért értékkel: $\delta y = \frac{\Delta y}{y}$
- kifejezhető százalékban is

Hibaterjedés

Adott egy mért x mennyiség, aminek ismerjük a Δx hibáját. Mekkora $y = f(x)$ hibája, ha f egy differenciálható függvény?



$$\Delta y = \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right| \Delta x$$

Hibaterjedés több változó esetén

Az x_i változók hibája normális eloszlású, melyet σ_x szórás jellemez. Mekkora lesz az $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ mennyiség hibája?

Hibaterjedés több változó esetén

Az x_i változók hibája normális eloszlású, melyet σ_x szórás jellemez. Mekkora lesz az $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ mennyiség hibája?

Ha $f(x_1, x_2, ..., x_i)$ minden változójában differenciálható, akkor tekintsük f Taylor-sorát az x_i változók átlaga körül:

$$f - \langle f \rangle \approx \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \langle x_i \rangle) + ...$$

A szórás

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= (f - \langle f \rangle)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (x_i - \langle x_i \rangle)^2 + \\
&+ 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle)
\end{aligned}$$

Hibaterjedés több változóra

A Taylor-sor négyzetében felfedezhetők a szórások és a kovarianciák kifejezései, vagyis:

$$\sigma_f^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \mathrm{Cov}_{ij}$$

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j) = (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle)$$

Példa: Két független változó $u = x + y$ összegének hibája:

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Példa: Két független változó $u = x \cdot y$ szorzatának hibája:

$$\sigma_u^2 = u^2 \left(\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}\right)$$