Az Euler módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023. március 9.

Tekintsük közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszerét:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

- y_i-k a keresett függvények
- az f_i függvények tetszőlegesek, de nem tartalmazzák az y_i-k deriváltjait.

Példa:

- az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \ldots)^T$ vektor tartalmazza koordinátákat és sebességeket
- x változó skalár, pl az idő

Figyelem! Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet is átírhatóak elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, lásd Bevezetés I fóliák

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Numerikus megoldás:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Euler módszer

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Numerikus megoldás:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Diszkretizálás után az n-ik lépésben:

$$\mathrm{y}_{n+1} = \mathrm{y}_n + h \cdot \mathrm{f}(x_n, y_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

y_0, x_0 kezdeti érték adott

Példa: harmonikus oscillátor

Harmonikus oszcillátor: $\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k \cdot x(t)}{m}$

Átírva elsőrendű egyenletek rendszerére:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{k \cdot x}{m} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v \end{aligned}$$

Jelölés: x és v felel meg a $\mathbf{y}$ vektor elemeinek, t a x független változónak és Δt a h lépésköznek.

Diszkretizálva:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \frac{k \cdot x_n}{m} \cdot \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \cdot \Delta t \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \end{aligned}$$

Hibaszámítás

A **y** vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy az x_n helyen az iterációból számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*

Hibaszámítás

A $\mathbf{y}$ vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy az x_n helyen az iterációból számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

A **y** vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy az x_n helyen az iterációból számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}h + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}h^2 + \ldots$$

- az Euler módszer ennek az első két tagját adja meg $\Rightarrow$ nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél

Hibaszámítás

A $\mathbf{y}$ vektor egy komponensére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy az x_n helyen az iterációból számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

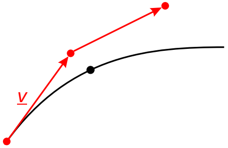
$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

- az Euler módszer ennek az első két tagját adja meg $\Rightarrow$ nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél
- a teljes számolás során $\sim 1/h$ lépés $\Rightarrow$ a *globális hiba* nem lehet kisebb $O(h)$-nál.

Az Euler-módszer hibája

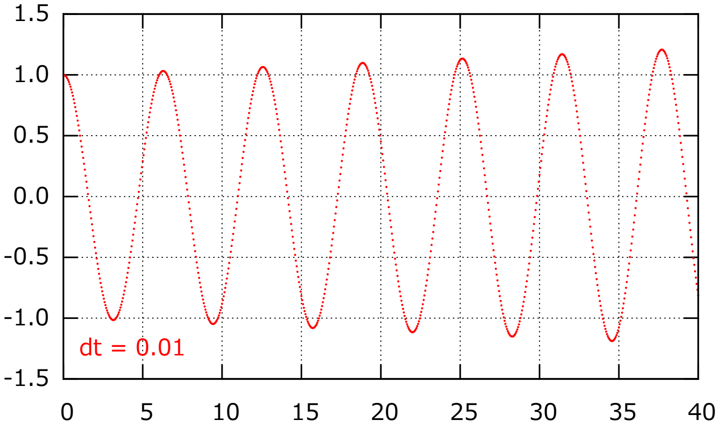
Az Euler-módszer esetében a deriváltak értékét mindig a lépés elején vesszük

- ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek lesz valamekkora hibája
- idővel nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól



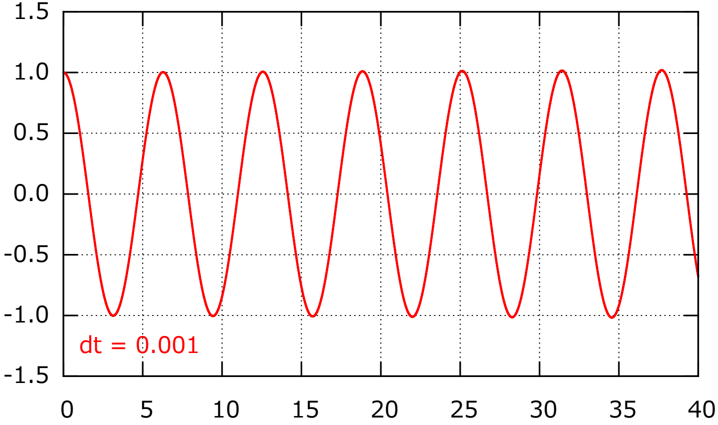
- ha a lépést felére csökkentjük, a hiba a negyedére csökken, de kétszer több lépésre van szükség

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



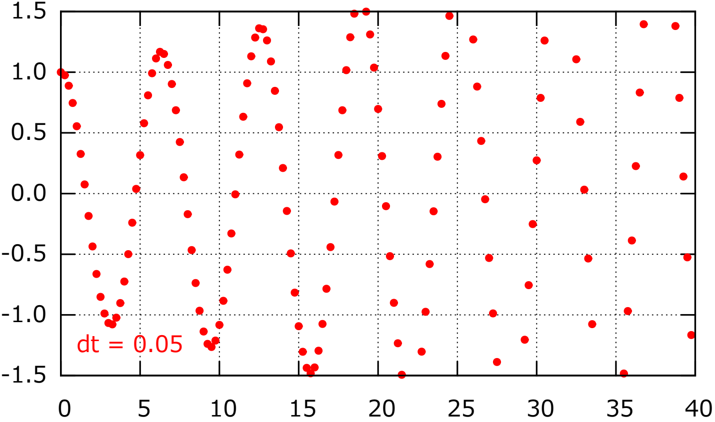
- Az oszcilláció amplitúdója időben lassan növekszik!

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t kisebbre vesszük, az oszcilláció amplitúdója az adott időtávon állandó

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t nagy, az oszcilláció amplitúdója gyorsan nő a számolásban

Az előző példában: harmonikus oszcillátor

- a test minden kilengéskor egy kicsit túllendült
- ez a módszer módszer pontatlansága miatt volt így
- a test minden kitéréskor plusz potenciális energiát nyert

Hamiltoni rendszerek szimulációjánál az energiamegmaradás alapkövetelmény!

- vannak módszerek, amelyek adott rendben megtartják az energiát $\Rightarrow$ ún. szimplektikus integrátorok
- vagy csökkentjük a lépéshosszt, hogy az integrálási idő alatt a hiba elhanyagolható legyen

Az integrálási idő invertálhatósága

Visszafelé időfejlesztve a rendszert visszajutunk-e a kezdeti állapotba?

- ha nem disszipatív (pl nincs súrlódás), akkor elvileg igen
- megmarad az energia

Visszafelé léptetve egy diszkrét integrátort, visszajutunk-e az eredeti kiindulási pontba?

- egyszerű integrátorral általában nem
- a numerikus hibák összeadódnak
- kaotikus egyenleteknél pedig fel is erősödnek

Legegyszerűbb szimplektikus és invertálható integrátor: lásd a Leapfrog módszer fóliákat!