Interpoláció polinomokkal

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023. március 9.

Alapfeltevés: az interpolálandó függvény *jól viselkedik*

- legyen folytonos, nincs ugrása két ismert pont között
- legyen sima: legyen differenciálható, és a deriváltjai is legyenek folytonosak

Alapfeltevés: az interpolálandó függvény *jól viselkedik*

- legyen folytonos, nincs ugrása két ismert pont között
- legyen sima: legyen differenciálható, és a deriváltjai is legyenek folytonosak

Ekkor valamilyen egyszerű függvény segítségével interpolálunk

- legegyszerűbb: lineáris
- általában: valamilyen alacsony rendű polinom

Kitekintés: vannak nehezen vagy egyáltalán nem interpolálható függvények

- pl. lökéshullámok hidrodinamikai szimulációkban (ugrásszerű változás a nyomásban, sűrűségben stb)

Lokális és globális interpoláció

Lokális interpoláció

- csak az x körüli k számú $x^{(i)}$ pontot használjuk
- az interpoláció rendje $k - 1$
- az egyes interpolációs intervallumok határán a interpoláló függvények deriváltjai általában nem folytonosak

Globális interpoláció

- az összes ismert pontot felhasználjuk
- ez tulajdonképpen függvényillesztés
- a globális interpoláció rendje $N - 1$, ahol N az összes ismert pont száma

Interpolációs modell választása

A függvényalak az interpolálandó adatoktól függ

- folytonosan differenciálható-e?
- vannak-e pólusai?
- milyen sűrűn van mintavételezve?
- periodikus-e?
- meg kell-e tartani a görbe alatti integrál értékét?
- mekkora a számítási igény?

Az egyik legegyszerűbb: interpoláció polinommal

- hogyan határozhatjuk meg a polinom együtthatóit?

Lagrange-formula

- $N-1$ fokú polinom interpoláció N pont felhasználásával
- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$-et az ismert $x^{(i)}$ és $y^{(i)} = f(x^{(i)})$ értékekkel

Lagrange-formula

- $N-1$ fokú polinom interpoláció N pont felhasználásával
- a $P(x)$ polinom x helyen felvett értékét közvetlenül állítjuk elő, a polinom együtthatóinak meghatározása nélkül
- fejezzük ki $P(x)$-et az ismert $x^{(i)}$ és $y^{(i)} = f(x^{(i)})$ értékekkel

Jelölésváltás: $x^{(i)} \to x_i$, $y^{(i)} \to y_i$

$$
\begin{aligned}
P(x) = \quad & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdot \ldots \cdot (x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot \ldots \cdot (x_1-x_k)} \cdot y_0 + \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdot \ldots \cdot (x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdot \ldots \cdot (x_2-x_k)} \cdot y_1 + \ldots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdot (x_k-x_{k-1})} \cdot y_k
\end{aligned}
$$

- kielégíti a $P(x_i) = y_i$ egyenlőséget

Példa: lineáris interpoláció (egyenes illesztés)

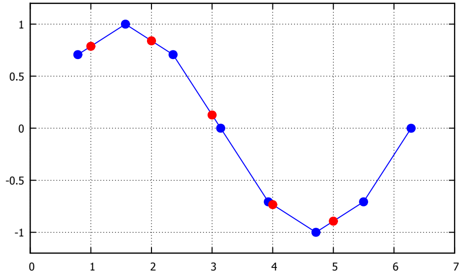
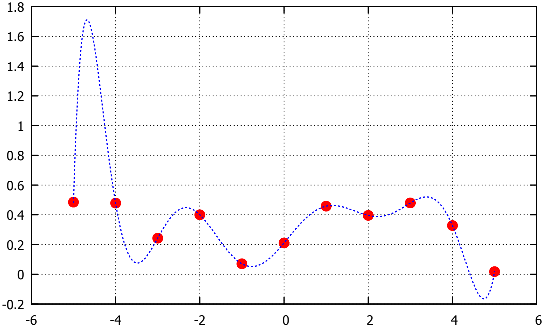


Figure: Kék pontok: eredeti adatok, piros pontok: kék pontok között lineáris interpolációval kapott értékek.

- lokálisan két pontot használunk az interpolációra
- a derivált nem folytonos az intervallumok határán

Példa: magasfokú polinomok interpoláció



Együtthatók:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0.0000\\
c_1 &= 0.0000\\
c_2 &= 0.0002\\
c_3 &= -0.0017\\
c_4 &= -0.0023\\
c_5 &= 0.0278\\
c_6 &= 0.0060\\
c_7 &= -0.1713\\
c_8 &= 0.0497\\
c_9 &= 0.3386\\
c_{10} &= 0.2109
\end{aligned}
$$

- folytonos derivált mindenhol
- de a polinom egyes helyeken vadul oszcillál