

# Interpoláció köbös spline-nal

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023. március 9.

Két pont között a legegyszerűbb interpolációs függvény az egyenes:

$$y(x) = A(x)y_j + B(x)y_{j+1},$$

ahol

$$A(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad B(x) = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

Ez kijön a Lagrange-formulából

Két pont között a legegyszerűbb interpolációs függvény az egyenes:

$$y(x) = A(x)y_j + B(x)y_{j+1},$$

ahol

$$A(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad B(x) = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

Ez kijön a Lagrange-formulából

Probléma:

- A második deriváltja az  $x_j$  pontokban nem meghatározott

# Köbös spline (cubic spline)

Előírjuk, hogy az ismert  $x_j$  pontokban az interpoláló  $f(x)$  függvény sima legyen, azaz

- létezzen a második deriváltja, és az legyen folytonos
- ebből következik, hogy az első deriváltja is folytonos.

A harmadfokú spline formulája:

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy_j'' + Dy_{j+1}'',$$

ahol

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad B = 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

a lineáris interpolációnál látottak, továbbá

$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2$$

$$D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2$$

Ellenőrzés:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ay_j'' + By_{j+1}''$$

Az  $A \equiv A(x)$  és  $B \equiv B(x)$  konkrét alakját felhasználva:

- $x = x_j$  esetén  $\frac{d^2y}{dx^2} = y_j''$  és  $x = x_{j+1}$  esetén  $\frac{d^2y}{dx^2} = y_{j+1}''$
- a második derivált folytonos a két intervallum, pl  $(x_{j-1}, x_j)$  és  $(x_j, x_{j+1})$  határán

Hogyan határozzuk meg az  $y_j''$  értékét?

# Köbös spline

$y_j''$  értékének meghatározása:

- az  $(x_{j-1}, x_j)$  és  $(x_j, x_{j+1})$  intervallumok határán a  $\frac{dy}{dx}$  első derivált legyen folytonos!

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} y_{j-1}'' + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} y_j'' + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} y_{j+1}'' = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

- ez összesen  $N - 2$  egyenlet az  $N$  db ismeretlen  $y_j''$ -re

# Köbös spline

$y_j''$  értékének meghatározása:

- az  $(x_{j-1}, x_j)$  és  $(x_j, x_{j+1})$  intervallumok határán a  $\frac{dy}{dx}$  első derivált legyen folytonos!

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} y_{j-1}'' + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} y_j'' + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} y_{j+1}'' = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

- ez összesen  $N - 2$  egyenlet az  $N$  db ismeretlen  $y_j''$ -re

Az egyértelmű megoldás kedvéért határfeltételeket is elő kell írni az  $x_1$  és  $x_N$  pontokban. Ilyen lehet pl.

- az interpoláció második deriváltja nulla az interpolációs intervallum két végén, vagy
- az interpoláció első deriváltja meghatározott értéket vesz az interpolációs intervallum végén

⇒ összesen  $N$  egyenlet



# $y_j''$ számolása

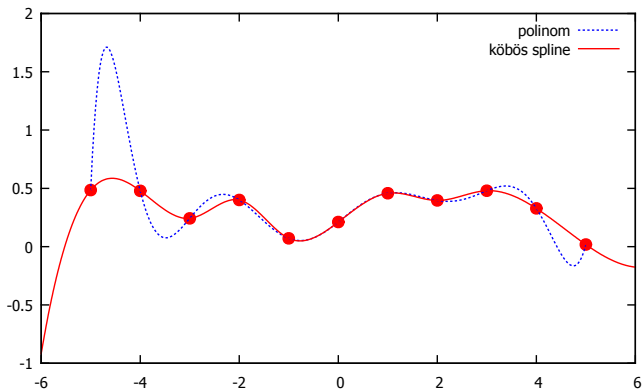
A probléma egy **tridiagonális** lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & & & & & \\ & & & & \dots & & & & & \\ & & & & \dots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} & & \\ & & & & \dots & 0 & a_N & b_M & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ \dots \\ y_{M-1}'' \\ y_M'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{M-1} \\ d_M \end{pmatrix}$$

Megoldás:

- lineáris egyenletrendszer megoldó rutinok

# A spline-ok jobbak, mint a polinomok



- A pontok között a k**ü**bös spline jól viselkedik
- Extrapolációra ez sem sokkal jobb