Paraméterek hibájának becslése II.

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023. március 2.

A paraméterek hibájának becslése más módon

A paraméterek hibájának becslése:

- ha a modell analitikusan ismer: Hesse-mátrix
- Egy jellegében más módszer: Monte Carlo módszerek
  - új “mérési eredményeket” szimulálunk és vizsgáljuk az illesztett paraméterek stabilitását
  - Jackknife módszer
  - Bootstrapping

Jackknife[1] módszer

Tekintsük a mérési pontokat, de minden lépésben hagyjunk ki egyet az illesztésből

- hagyjuk ki az i. pontot
- illesszük a modellt $N-1$ pontra
- legyen az illesztett paraméterek vektora $\mathbf{a}_{(i)}$

Minden egyes mérési pontra megismételve összesen N különböző paramétervektort kapunk

- ezek átlaga lesz a becsült paramétervektor

$$\mathbf{a}_{\text{jack}} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{a}_{(i)}$$

- az k-ik illesztett paraméter szórásnégyzete pedig

$$\sigma^2_{\text{jack},k} = \frac{N-1}{N} \sum_i (a_{(i),k} - a_{\text{jack},k})^2$$

[1] jackknife = bicska

Bootstrapping

Főbb lépések:

- jelöljük az eredeti, N db adatot tartalmazó adathalmazt $\mathcal{D}_0$-val
- a $\mathcal{D}_0$ segítségével meghatározzuk a $\mathbf{a}_{(0)}$ paramétereket
- $\mathcal{D}_0$ segítségével új, szintetikus adathalmazokat generálunk: $\mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \ldots$ ("S": synthetic).
- minden $\mathcal{D}_i^{(S)}$ segítségével kiszámoljuk az $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)}$ illesztett paramétervektort
- $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)}$ segitségével kapunk egy eloszlást az illesztett paraméterekre
- az $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)}$ eloszlása $\mathbf{a}_{(0)}$ körül jelzi, hogy mekkora hibával tudjuk $\mathbf{a}_{(0)}$-t meghatározni
- pl ha $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)}$ eloszlása $\mathbf{a}_{(0)}$ körül nagyon keskeny, akkor kicsi $\mathbf{a}_{(0)}$ hibája

Bootstrapping

Hogyan kapjuk meg $\mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \ldots$-t ?

- véletlenszerűen kiválasztunk N adatot $\mathcal{D}_0$-ból, úgy, hogy minden választás után "*visszahelyezzük*" a kiválasztott adatot $\mathcal{D}_0$-ba
- $\Rightarrow \mathcal{D}_1^{(S)}, \mathcal{D}_2^{(S)}, \ldots$-ben egyes adatok esetleg többször is szerepelhetnek

További részletek: *Numerical Receipes*

Konfidencia tartomány

A bootstrapping-gal kapunk egy M-dimenziós eloszlást az $\mathbf{a}$ paramétervektorra

- pl kétdimenziós $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ esetén $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)} = (a_{(i)0}^{(s)}, a_{(i)1}^{(s)})$
- ezzel ki tudjuk számolni a $\mathbf{a}_{(i)}^{(s)} - \mathbf{a}_{(0)}$ értékeket $\Rightarrow$ egy-egy pont a síkban
- ezek után meghatározhatunk egy tartományt, amelyben bizonyos valószínűséggel található:
    - az egyik paraméter, pl $a_{(0)0}$, függetlenül a másiktól ($a_{(0)1}$)
    - a két paraméter együttesen ($a_{(0)0}, a_{(0)1}$)

konfidencia tartomány: az a tartomány, amely adott valószínűséggel (pl 95%) tartalmazza a paramétervektort vagy annak egy elemét

Konfidencia tartomány

Kétdimenziós példa:

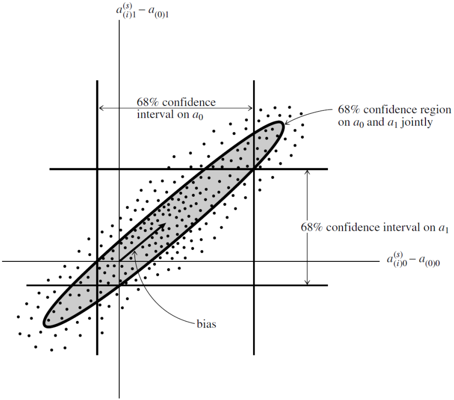

Figure: A szimulált paraméterértékek 68% van a függőleges illetve vízszintes vonalakkal jelzett intervallumban. $a_{(0)0}$, $a_{(0)1}$: az eredeti adathalmaz segítségével kapott értékek . ábra: Numerical Receipes.

További fontos kérdések

A paraméterek meghatározásával még nem ért véget a feladat:

- mekkora a meghatározott paraméterek hibája? ✓
- egyáltalán mennyire jó a modell? Hiába kicsi a meghatározott paraméterek hibája, ha rossz a modell, amit használunk