

Runge-Kutta módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023. március 9.

Az Euler-módszer javítása: középponti módszer

Az Euler-módszer aszimmetrikus:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

- megoldást egy h -val léptetjük, de a szükséges deriváltat mindig az x_n helyen, vagyis az intervallum elején számítjuk ki.

Javítsunk a módszeren:

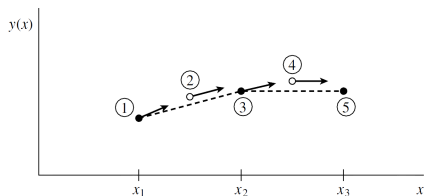
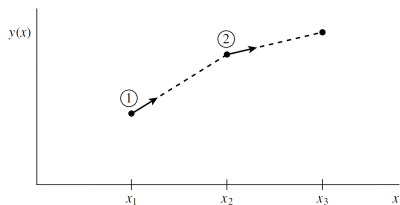
- kiszámítjuk a deriváltat az intervallum elején
- teszünk egy fél lépést és kiszámoljuk a deriváltat egy középső pontban
- ezt használjuk a teljes lépésben

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

Egyszerű Euler-lépés és a középponti módszer



A középponti módszer hibája $O(h^3)$ nagyságrendű

A hiba további csökkentése: negyedrendű Runge–Kutta-módszer

A lépést több részlépésből előállítva várhatóan a hiba tovább csökken.

Negyedrendű Runge–Kutta (RK4):

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$$

A módszer hibája $O(h^5)$ nagyságrendű

A negyedrendű Runge–Kutta-módszer

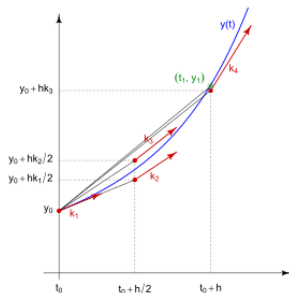


Figure: A függvény deriváltját négy pontban számoljuk ki: a kezdetiben, kétszer a lépéstávolság felénél és egyszer még a lépés végén. [Wikipedia](#).

	f kiértékeléseinek száma	hiba
Euler-módszer	1	$O(h^2)$
középponti módszer	2	$O(h^3)$
4-ed rendű Runge–Kutta	4	$O(h^5)$

A Runge–Kutta-módszer magasabb rendekre is általánosítható

- meddig érdemes elmenni?
- a több köztes pont mindig nagyobb pontosságot jelent? \Rightarrow nem feltétlenül
- viszont több függvénykiértékeléssel jár

- az RK módszer egy általános, sokféle problémára alkalmazható módszer
- speciális feladatok esetén illetve ha a megoldásról van valami előtudás, akkor található ennél optimálisabb módszer is