

LIR rendszer átviteli függvénye

Lineáris rendszerekben $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ alakúak a sajátfüggvények:

$$\begin{aligned} H[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega_0\tau}h(\tau)d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0\tau}h(\tau)d\tau \right) e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Az $f(t)$ amplitúdója és fázisa változik a rendszeren áthaladva, de frekvenciája nem!

Azaz:

$$f_{ki}(t) = H[f_{be}](t) = H(\omega_0)f_{be}(t)$$

De $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, azaz a sajátfüggvények sin (cos) alakúak!

Modulációs és fázis átviteli függvény

$H(\omega), H(f)$: átviteli függvény, l. Bode diagram

$$H(\omega_0) = |H(\omega_0)|e^{i\Phi(H(\omega_0))}$$

azaz

$$\begin{aligned} f_{ki}(t) &= H(\omega_0)f_{be}(t) \\ &= |H(\omega_0)|e^{i\Phi(H(\omega_0))}e^{i\omega_0 t} \\ &= |H(\omega_0)|e^{i(\Phi(H(\omega_0))+\omega_0 t)} \end{aligned}$$

$|H(\omega_0)|$: modulációs átviteli függvény

$\Phi(H(\omega_0))$: fázis átviteli függvény

H operátor sajátvektora/sajátfüggvénye a $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ — legyenek ezek a bázisvektorok a lineáris felbontásnál!

A lineáris hálózatok általános jellemzői

Átvitel: a ki- és bemenő amplitúdó nagyságának aránya.

Átvitel frekvenciafüggése az átviteli- vagy transzfer karakterisztika. Egy bemenetű és egy kimenetű lineáris hálózatok esetén a Bode-diagram (azaz amplitúdó- és a fáziskarakterisztika együttesen) egyértelműen meghatározza a hálózat viselkedését, tökéletesen leírja a rendszert.

Két rész: amplitúdó átviteli karakterisztika + fáziskarakterisztika: teljes (komplex) átvitel!

Az átvitelt logaritmikus skálán mérjük.
decibel (dB): az arányszám logaritmusa

$$20 \log_{10}(U_{ki}/U_{be})$$

Fourier transzformáció lineáris rendszerekben

Minden jelet fel tudunk bontani sin és cos függvények linárkombinációjára!

Mivel lineáris rendszereknél sin/cos függvények amplitudója változhat, és késhet a jel (fázis is változik), de a frekvencia nem, ezért egyszerűen lehet tárgyalni a lineáris rendszerek viselkedését!

Módszer:

bemenőjel \rightarrow Fourier felbontás \rightarrow egyedi szinuszos jelek kiszámolása
 \rightarrow összeadás/integrálás \rightarrow kimenő jel

Fourier transzformáció

$$V(\omega) = F\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$v(t) = F^{-1}\{V(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Skaláris szorzás függvények között (mennyire hasonlítanak $e^{-i\omega t}$ -re)!

Fourier transzformáció

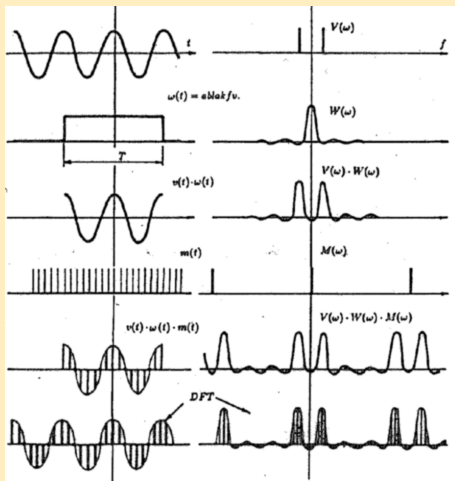
Pl. $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (tiszta cos):

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t)[\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt \\
 &= 1/2\delta(\omega - \omega_0) + 1/2\delta(\omega + \omega_0)
 \end{aligned}$$

Fourier transzformáció tulajdonságai

$a_1 v_1 + a_2 v_2$	$a_1 V_1 + a_2 V_2$	a transzformáció lineáris
$v(t/a)$	$aV(a\omega)$	léptékváltoztatás. Rövidebb jelnek szélesebb a spektruma
$v(t - t_0)$	$V(\omega)e^{-i\omega t_0}$	az időeltolás nem változtatja meg a spektrum alakját
$v(t)e^{i\omega_0 t}$	$V(\omega - \omega_0)$	szinuszos moduláló jel eltolja a spektrumot, de nem változtatja meg.
$\frac{d^n}{dt^n} v(t)$	$(i\omega)^n V(\omega)$	differenciálni könnyű a frekvenciatartományban
$\int_{-\infty}^t v(t)dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt$	$\frac{1}{i\omega} V(\omega)$	integrálni könnyű a frekvenciatartományban
$\int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)v_2(t - \tau)d\tau$	$V_1(\omega)V_2(\omega)$	konvolúció: a frekvenciatartományban szorzássá redukálódik, ill. fordítva

Teljes DFT folyamat



Szorzás és konvolúció duális a frekvencia-idő térben. A tisztán elméleti két Dirac-delta $\sin x/x$ burkolójú komplex vonalas spektrumot eredményez.

Konvolúciós integrál valós függvényekre

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\delta(x - \alpha)d\alpha \\H[f(x)] &= H\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\delta(x - \alpha)d\alpha\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha)\delta(x - \alpha)]d\alpha\end{aligned}$$

De H homogén és $f(\alpha)$ nem függ x -től:

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)H[\delta(x - \alpha)]d\alpha \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x, \alpha)d\alpha\end{aligned}$$

Konvolúciós integrál valós függvényekre..

Ez egy Fredholm-típusú integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x, \alpha)d\alpha$$

A súlyfüggvény az impulzus válasz (Green-fv.):

$$h(x, \alpha) = H[\delta(x - \alpha)]$$

Ha $H[\delta(x - \alpha)] = h(x - \alpha)$, akkor :

$$H[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha$$

Ez a **konvolúciós integrál!**

Konvolúciós integrál valós függvényekre...

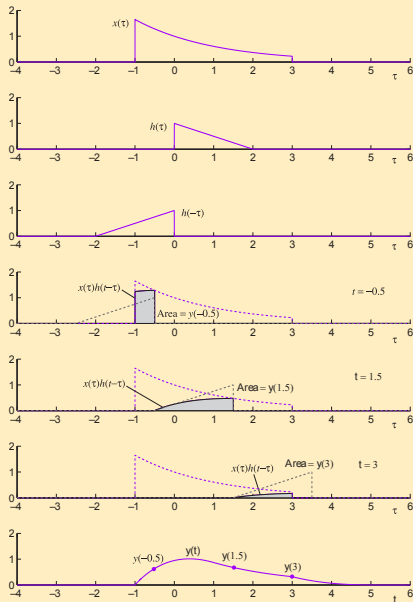
$$H[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha$$

- toljuk el h -t α értékkel
- szorozzuk össze $f(\alpha)$ -val
- ismételjük meg minden α -ra, és integráljunk!

vagy:

- bontsuk fel a bemenő jelet megfelelő amplitúdójú Dirac-delták összegére
- számoljuk ki minden Dirac-deltára a válaszfüggvényt
- összegezzük a válaszfüggvényeket a megfelelő amplitúdókkal súlyozva

Konvolúció folytonos esetben



Milyen a konvolúció Fourier-térben?

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x) * h(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha \\ F[g(x)] &= F[f(x) * h(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha \right] e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x - \alpha)e^{-i\omega x} dx \right] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)F[h(x - \alpha)]d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)H(\omega)e^{-i\omega\alpha} d\alpha \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{-i\omega\alpha} d\alpha \\ &= H(\omega)F(\omega)\end{aligned}$$

A konvolúció **egyszerű** a Fourier-térben!

$$g(x) = f(x) * h(x)$$

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

Ellenállás impedanciája $Z_R = R$ (valós)

Kondenzátor impedanciája $Z_C = 1/(iC\omega)$

Induktivitás impedanciája $Z_L = iL\omega$.

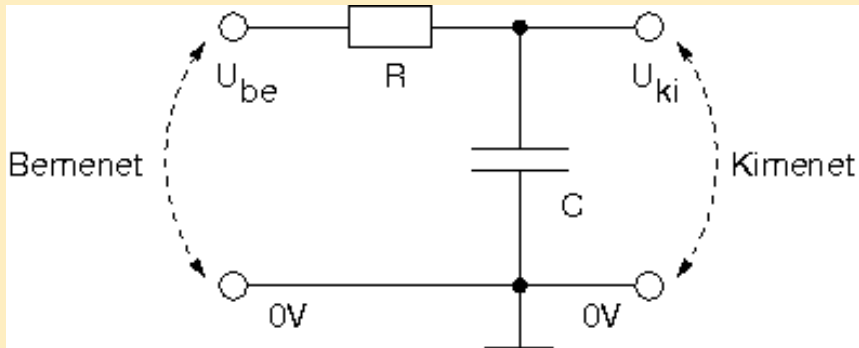
Komplex impedancia

hatékony a lineáris elektronikai rendszerek számolása, mivel igazak a Kirchoff-törvények, azaz pl. a soros- és párhuzamos kapcsolási képletek!
 Elektromérnöki alkalmazás: i -vel a változó áramot jelölik, ezért az imaginárius egységet j -vel jelölik. Mi NEM!

$Z_C Z_L$, "igazi" ellenállások!

Egyszerű aluláteresztő szűrő

avagy „kváziintegráló” áramkör:



Lineáris rendszer

a feszültségek egymással arányosak!

Komplex komplex írásmódban:

$$U_{be}(t) = U_{be} e^{i\omega t}$$

$$U_{ki}(t) = U_{ki} e^{i\omega t}$$

A kimenő feszültség és az áram kapcsolata

$$I(t) = C \frac{d}{dt} U_C(t) = C \frac{d}{dt} (U_{ki} e^{i\omega t}) = i\omega C U_{ki} e^{i\omega t}$$

A bemenő feszültség

$$U_{be}(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R + U_{ki} e^{i\omega t} = (i\omega CR U_{ki} + U_{ki}) e^{i\omega t}$$

Lineáris rendszer

A kettő aránya

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

ill.

$$\left| \frac{U_{ki}}{U_{be}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

A két számolási mód ekvivalens, de a komplex egyszerűbb.

Négyzetgyökös tag az abszolút értékben: a kondenzátor és az ellenállás feszültségei között 90 fokos a fáziskülönbség.

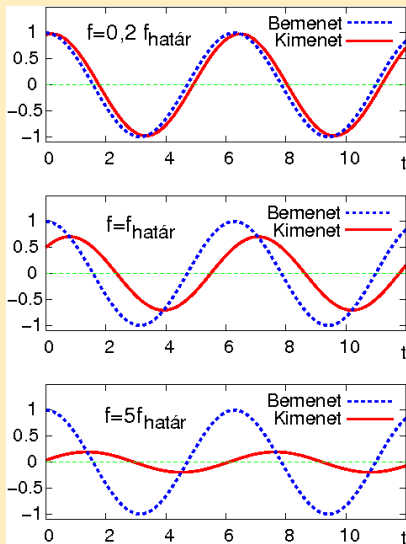
A kimeneti feszültség függ a frekvenciától (amplitúdó ill. fázis).

$\omega_h = 1/(RC)$: határfrekvencia

$\tau = RC$: időállandó

$f_h = 1/(2\pi RC) = \omega_h/(2\pi) = 1/(2\pi\tau)$

Egyszerű RC aluláteresztő kapcsolás kimenete



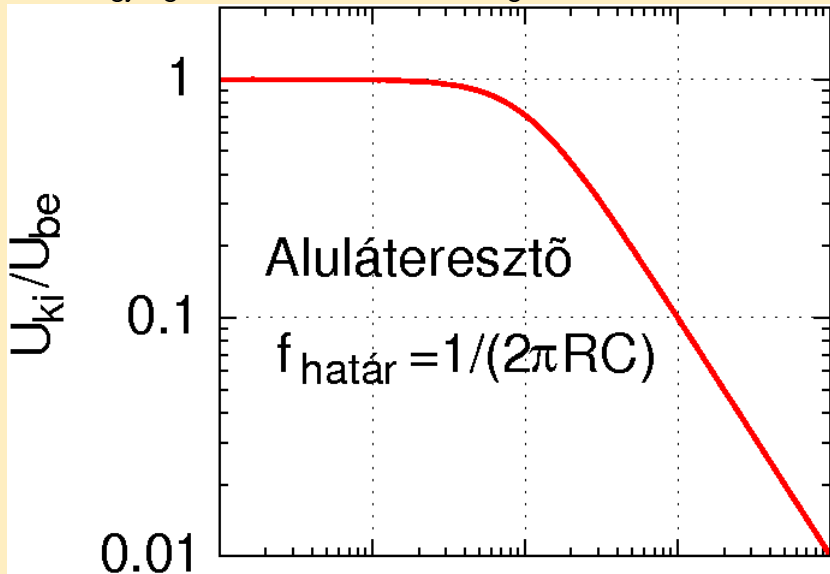
Felül $\omega = \omega_h/5$, közepén $\omega = \omega_h = 1/(RC)$, alul $\omega = 5\omega_h$ frekvencián

$$\left| \frac{U_{ki}}{U_{be}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

- kis frekvencián $U_{ki}/U_{be} \approx 1$
- nagy frekvencián $U_{ki}/U_{be} \approx \omega_h/\omega$
- határfrekvencia: köztes helyzet, $1/\sqrt{2}$ -ed rész az amplitúdó. A kimenő jel teljesítménye ebben a pontban a fele a bemenő jelének!

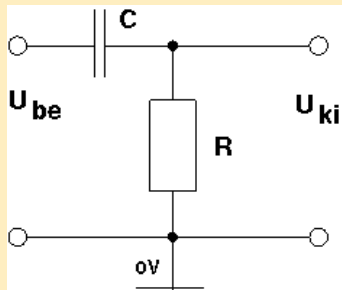
Ki- és bemenő amplitúdó nagysága a frekvencia függvényében.

Több nagyságrenden keresztül: kétszer logaritmikus ábrázolás!



Felüláteresztő RC kapcsolás

R és C alkatrészek felcserélve (máshonnan vesszük a kimenetet!).

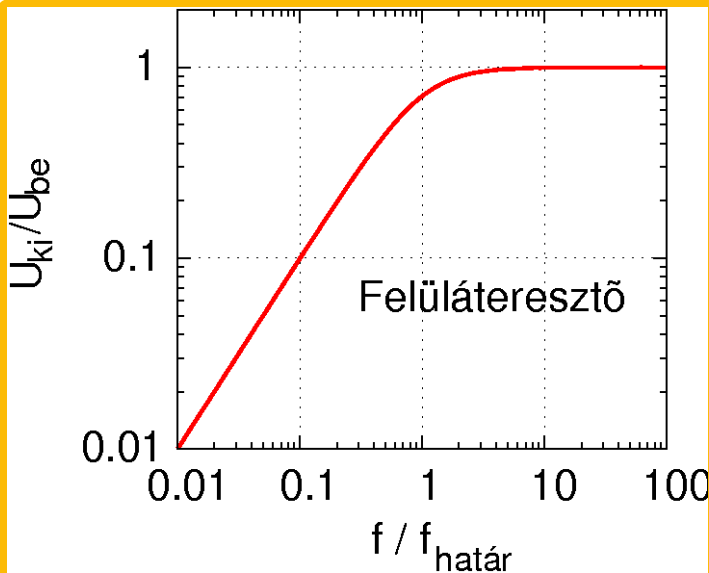


A ki- és bemenő feszültségek aránya

$$\frac{U_{ki}}{U_{be}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

Az amplitúdók aránya

$$\left| \frac{U_{ki}}{U_{be}} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$



A ki- és bemenő feszültség aránya pontosan az aluláteresztőnek a „fordítottja”: nagy frekvencián egységnyi, kis frekvenciákon pedig ω -val

Határfrekvencia: $\omega_h = 1/(RC) = 1/\tau, \tau = RC$, $f_h = 1/(2\pi RC)$

A határfrekvencián a jelek aránya $1/\sqrt{2}$.

Ugyanaz az RC kapcsolás, csak egyik esetben az R , a másik esetben a C alkatelemen nézzük a jelet!

Az alul- + felüláteresztő jelének összege a bemenő jel!

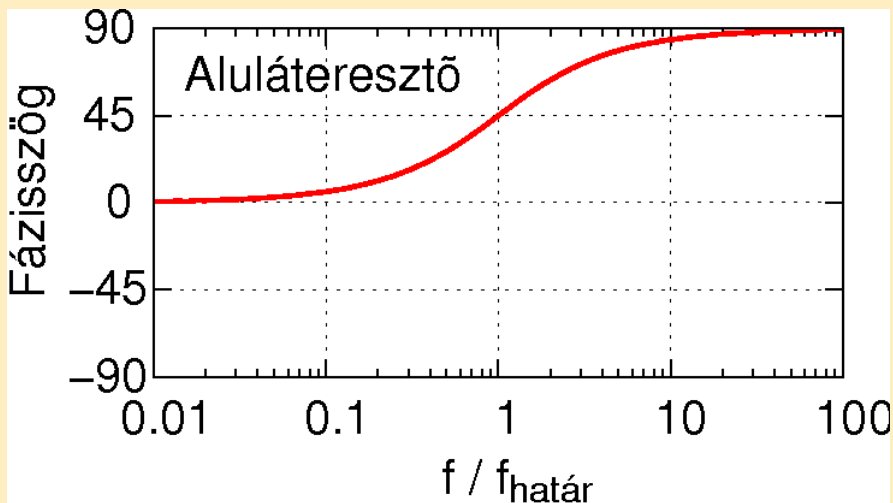
Fázisszög eltérés

$\phi(\omega)$

Valós számolási módban a szögfüggvények összeadási képletei alapján

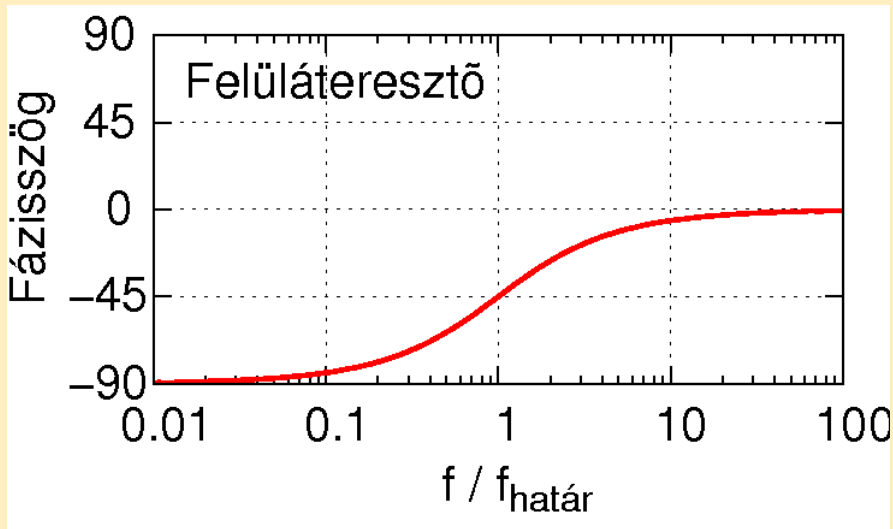
Komplex módszernél: amplitúdó-arány argumentuma

A ϕ fázisszög a frekvencia függvényében az egyszerű aluláteresztő esetében



A fázisszög éppen a határfrekvencia környékén változik gyorsan!

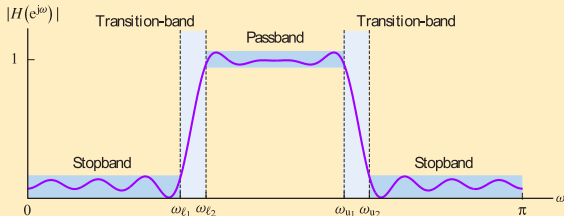
A ϕ fázisszög a frekvencia függvényében az egyszerű felüláteresztő esetében



A fázisszög éppen a határfrekvencia környékén változik gyorsan!

Szűrő paraméterek

- ingadozás az átviteli sávban rossz

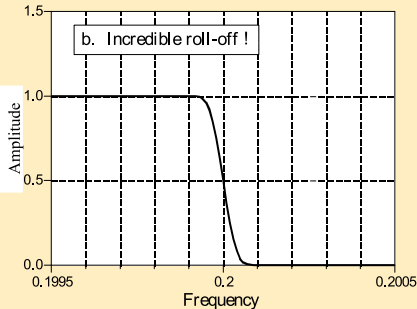
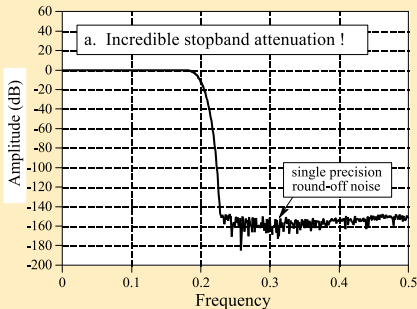


- ingadozás a vágási részen elfogadható: pl. -3 dB adhatja meg a vágási pontot (mint az RC esetén)
- vágás mértéke: dB/dekád
- vágási szint (pl. -40 dB)
- fázis linearitás csak az átviteli sávban fontos
- a fázismenetben a kicsi nemlinearitás még elfogadható lehet
- impulzusátvitel rossz lehet - késleltetés nem állandó!
- stabilitás fontos!

Szűrő típusok

Aluláteresztő általános alakja:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + F(\omega/\omega_0)}$$



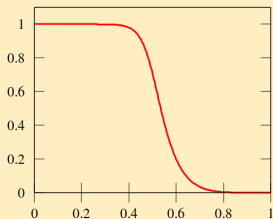
Szűrő típusok

Példák:

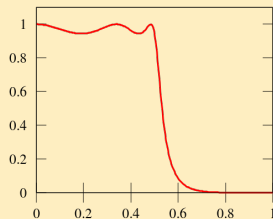
- Bessel: $H(\omega) = \theta_n(0)/\theta_n(\omega/\omega_0)$
 $\theta_n = \sum_{k=0}^N a_k s^k$ $a_k = (2n - k)! / (2^{n-k} k! (n - k)!)$, s_k Bessel polinóm.
Pl. $H_3(s) = 15 / (s^3 + 6s^2 + 15s + 15)$
maximálisan sima fázismenet - „legjobb” csoportsebesség-eloszlás
lassú lefutás
- Butterworth: $F(\omega/\omega_0) = (\omega/\omega_0)^{2n}$
„legsímább” átvitel az átviteli sávban
- Csebisev: $F(\omega/\omega_0)$ Csebisev polinóm
gyors lefutás, de ingadozás is van - rossz fázismenet

Szűrő típusok

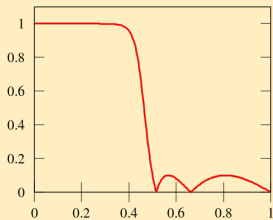
Butterworth



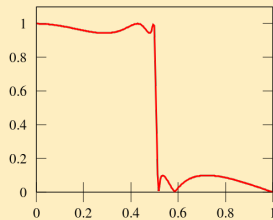
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2

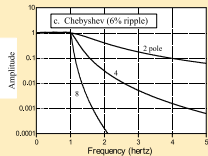
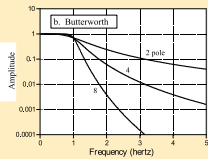
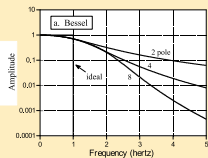


Elliptic

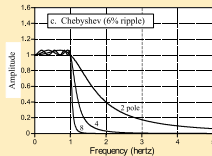
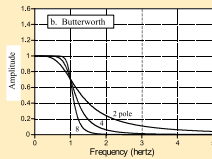
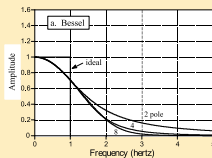


Szűrő típusok

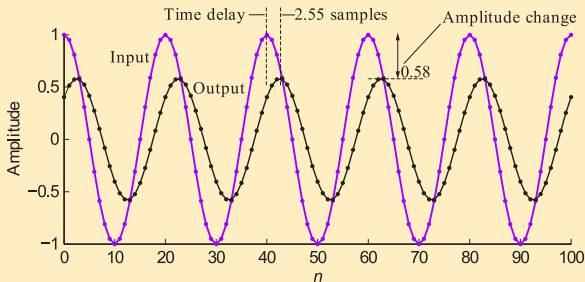
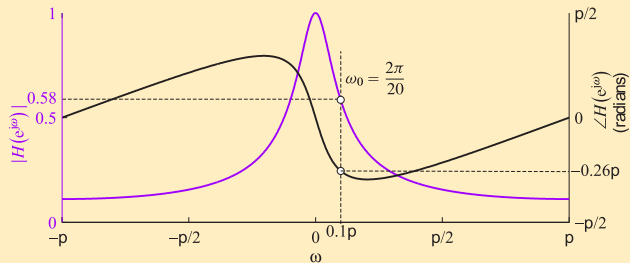
Log scale



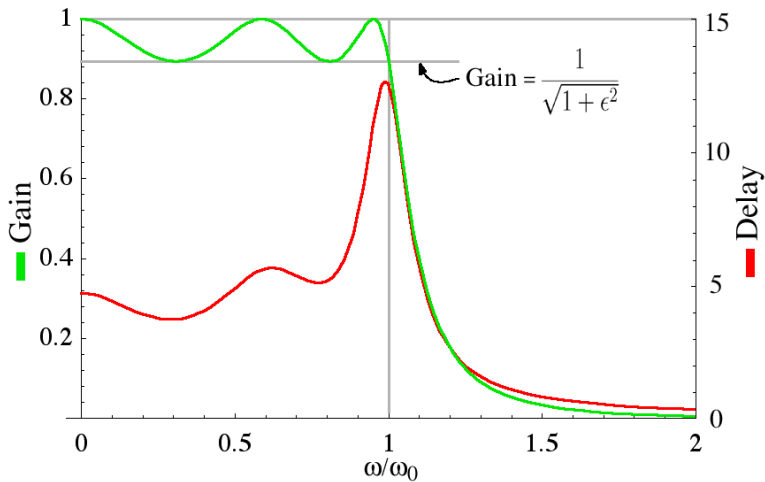
Linear scale



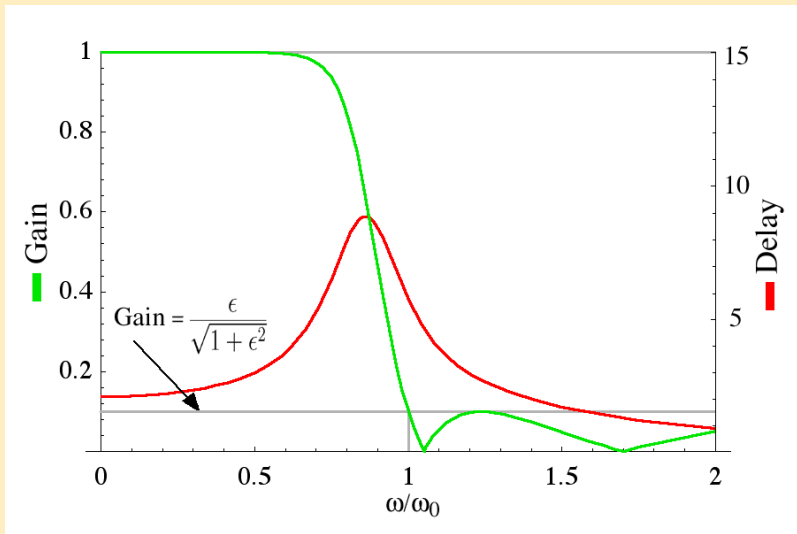
A fáziszenet és a késleltetés csatlódik



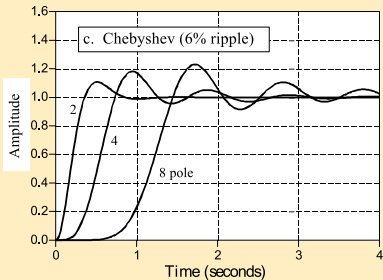
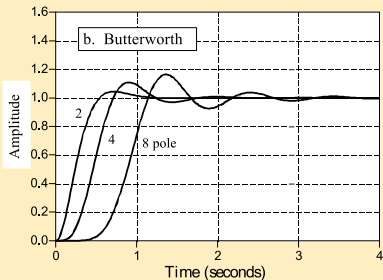
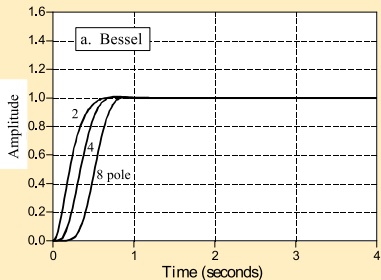
Csebisev I. típus: átvitel és késleltetés



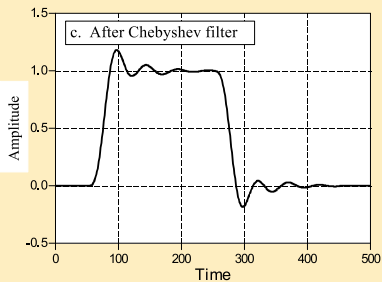
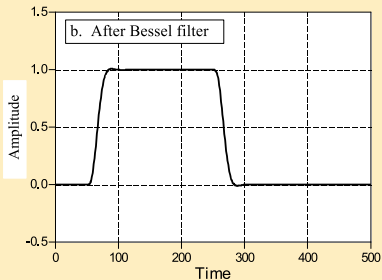
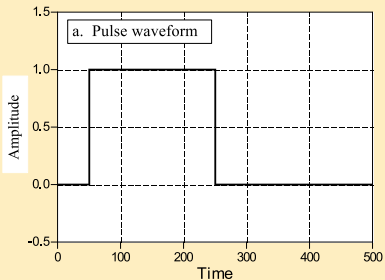
Csebisev II. típus: átvitel és késleltetés



Ugrásfüggvény-átvitel



Ugrásfüggvény-átvitel



Korrelációs függvények

Hasonlóság mértéke \Rightarrow a két függvény szorzatának integrálja
Időbeli változások esetén lehet vizsgálni a hasonlóságot a τ relatív időkülönbség szerint:

Keresztkorrelációs függvény:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t - \tau)dt$$

ill. periódikus jelekre:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t)v_2(t - \tau)dt$$

Korrelációs függvények

Keresztkorrelációs függvény komplex függvényekre:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2^*(t - \tau)dt$$

ill. periódikus jelekre:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t)v_2^*(t - \tau)dt$$

, ahol a * a komplex konjugálást jelenti.

Autokorrelációs függvény

Mennyire hasonlít egy függvény saját magára?

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t-\tau)dt$$

ill.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t-\tau)dt$$

Az autokorrelációs függvény tulajdonságai

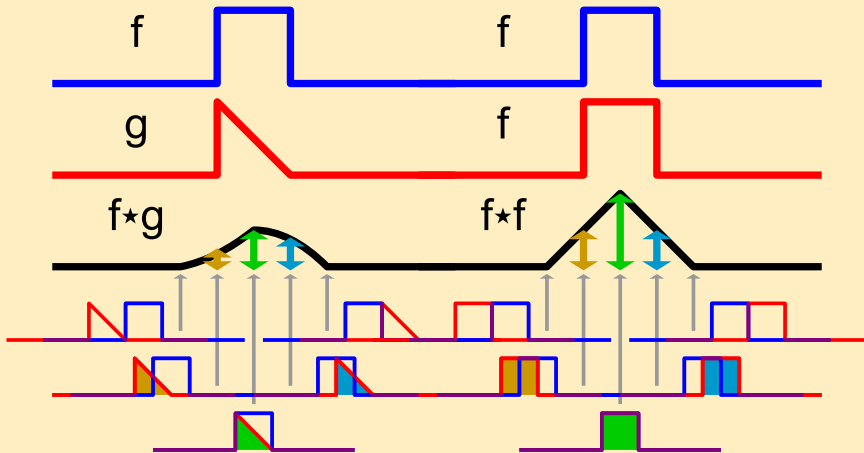
$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t - \tau)dt$$

- $R(\tau) = R(-\tau)$
- $R(0) \approx \int v^2(t)dt$ („energia”),
- $R(0) > R(\tau)$, $\tau > 0$
- két függvény összegének autokorrelációs függvénye nem a két függvény autokorrelációs függvényének összege
- az autokorrelációs függvényből nem lehet az eredeti függvényt visszakapni.
- zajban eltemetett jeleket is lehet észlelni (pl. pulzárok, MMR)

Autokorrelációs függvény

Cross-correlation

Autocorrelation



Energiaspektrum és autokorrelációs függvénye

Wiener-Hincsin tétel (Parseval azonosság, fluktuáció-disszipáció tétel) :

$$|V(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

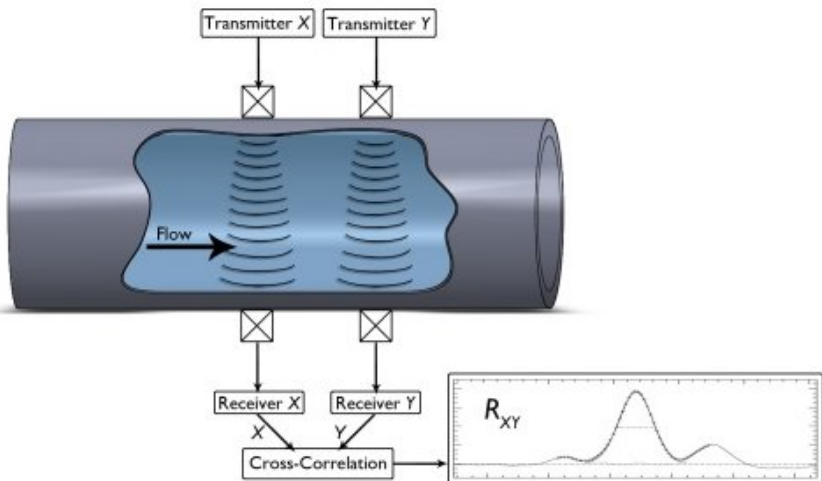
Wiener-Hincsin tétel

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t-\tau)dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_1)e^{j\omega_1 t}d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega_2)e^{-j\omega_2(t-\tau)}d\omega_2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_1)V^*(\omega_2)e^{j(\omega_1-\omega_2)t}e^{j\omega_2\tau}d\omega_1 d\omega_2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_1)V^*(\omega_2)\delta(\omega_1-\omega_2)e^{j\omega_2\tau}d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega_1)V^*(\omega_2)e^{j\omega_2\tau}d\omega_2 = F^{-1}(|V(\omega)|^2)(\tau)
 \end{aligned}$$

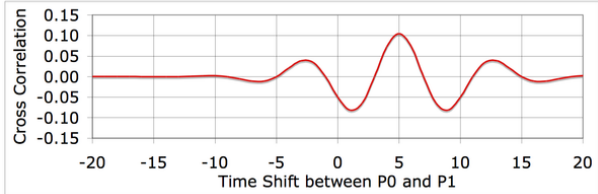
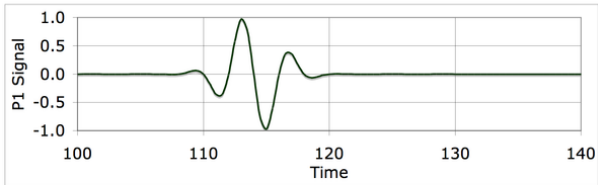
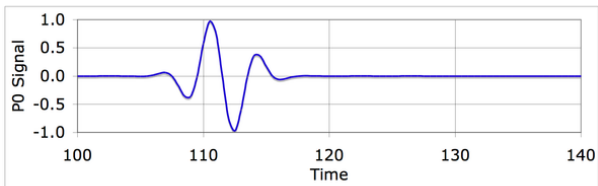
Különböző jelek - azonos energiaspektrum

pl. RC aluláteresztő hálózaton az ideális impulzusra kapott válaszjel energiaspektruma megegyezik egy fehér zaj hatására létrejövő kimenőjel energiaspektrumával

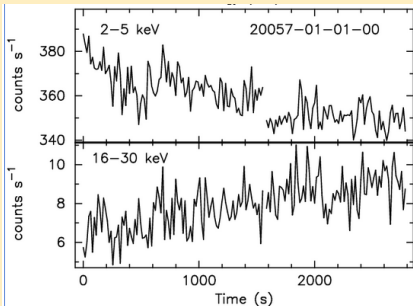
Folyadék sebességének mérése korrelációs függvénnyel



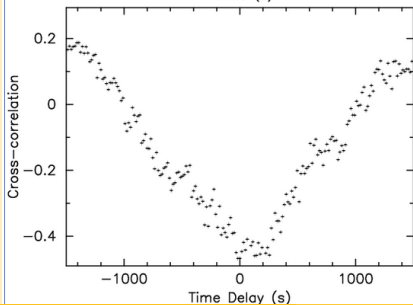
Folyadék sebességének mérése korrelációs függvénnyel



Cyg X-2 jet mechanizmus: korreláció az egyes csatornáknban

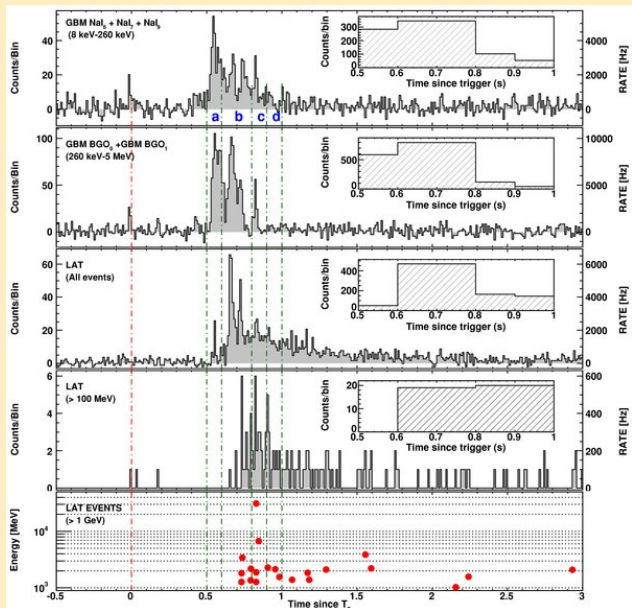


The lightcurves, cross-correlations between the soft (2-5 keV) and hard (16-30 keV) X-rays, the X-ray spectra of the ObsID for hard and soft regions of the lightcurve are shown.

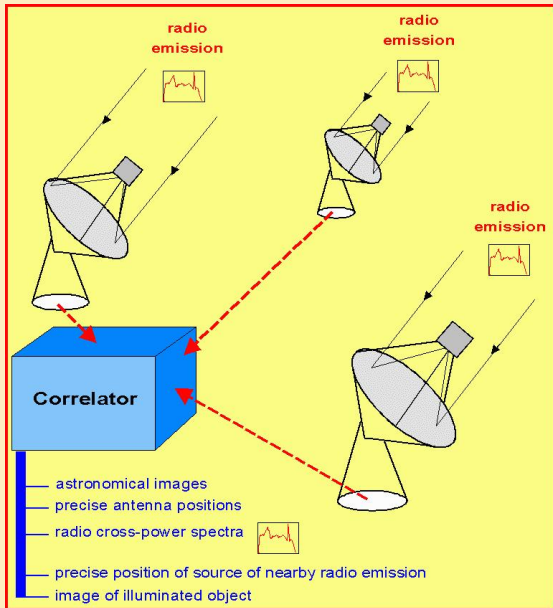


The lightcurves, cross-correlations between the soft (2-5 keV) and hard (16-30 keV) X-rays, the X-ray spectra of the ObsID for hard and soft regions of the lightcurve are shown.

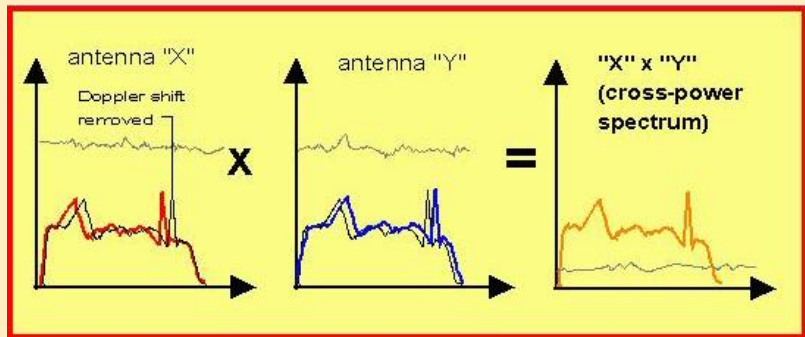
GRB nagyenergiás korreláció: a fénysebesség nem függ az energiától



VLBA észlelések



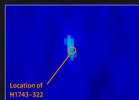
VLBA észlelések



VLBA észlelések

Caught in the Act: Black Hole H1743–322 Launches a Jet

Very Long Baseline Array radio images



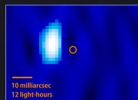
May 28, 2009



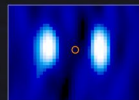
May 30



June 2

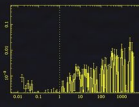
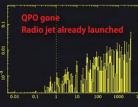
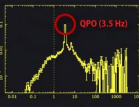
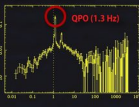
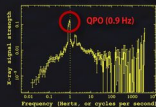


June 5

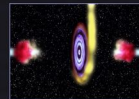
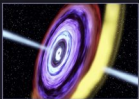


June 6

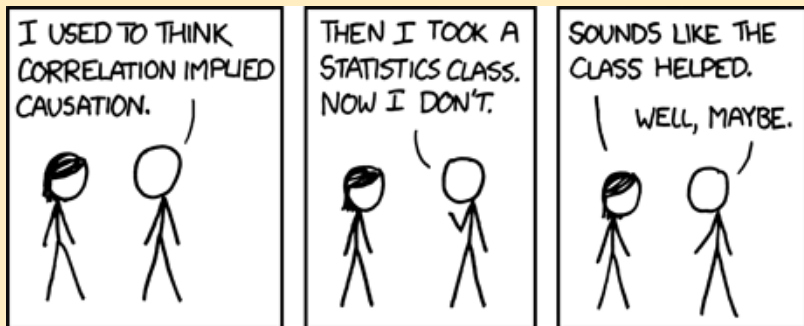
Rossi X-ray Timing Explorer power spectra



Artist's rendition



Nem mindig jó a korreláció...



Rendszervizsgálat

Mérhető, vizsgálható	Bemenet	Kimenet
Frekvenciakarakterisztika	Szinuszos generátor változatható frekvenciával	Amplitúdó és fázismérő
Súlyfüggvény	(Ideális) impulzust adó jelforrás	Időfüggvényt rögzítő eszköz, pl. oszcilloszkóp
Súlyfüggvény	Szélessávú zajforrás	Korrelátor számítógép

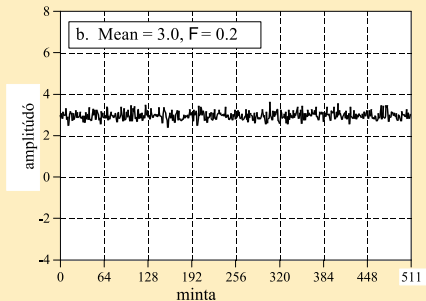
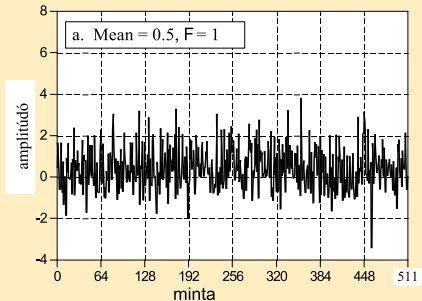
Zajok jellemzői

Zaj és zavar:

- zaj: nem lehet megszüntetni
- zavar: elvben kiszűrhető

Zajok jellemzése valószínűségi adatokkal: átlag és szórás

Zajok jellemzői



N darab mérés esetén a szórás csökken:

$$\sigma \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Sok mérés \rightarrow kicsi szórás, ha stacioner a folyamat.

S/N általános viselkedése is ilyen

Fehérzaj

B sávszélességű fehér zaj

- autokorrelációja $t \neq 0$ esetén 0
- keresztkorrelációja minden jellel 0
- n_0 teljesítménysűrűség teljesen leírja

$$P_{\text{zaj}} = n_0 B$$

Teljesítményspektruma konstans - megegyezik a Dirac-deltáéval!

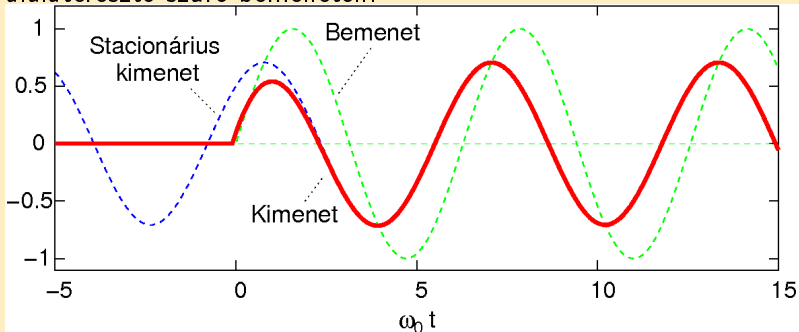
Autokorrelációs függvényük azonos!

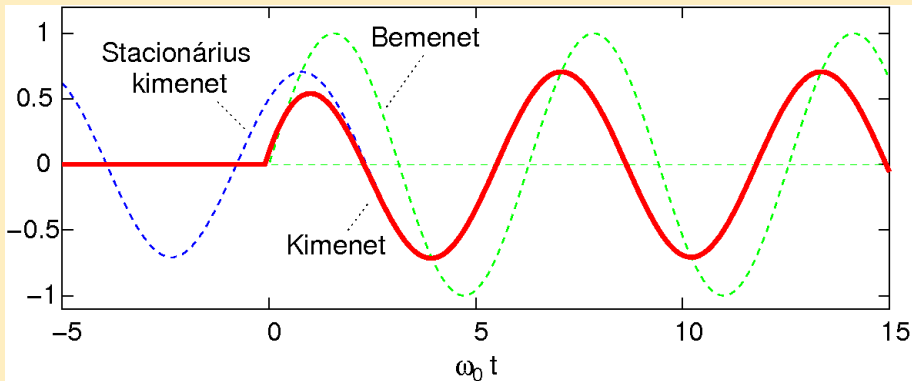
Bekapcsolási jelenségek, tranziensek

Lineáris rendszer: a harmonikus jelekre (végtelen régóta tartó adott amplitúdójú jel) adott válasz teljes egészében leírja a rendszert.

Milyen hosszú/rövid tranziens után tekinthető stacionáriusnak a rendszer?

Pl. $t = 0$ pillanattól induló $\sin(\omega_0 t)$ (ω_0 határfrekvenciájú) jel egy aluláteresztő szűrő bemenetén:



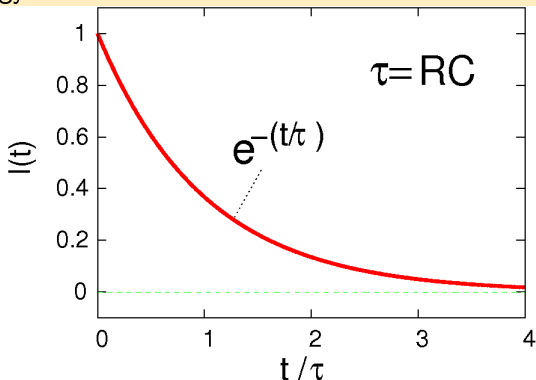
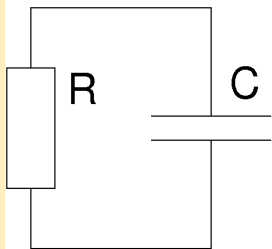


$\approx 3 - 5RC$ idő után a kimenet belesimul a (formailag) végtelen régen tartó jel alakjába.

Egyszerű alul- és felüláteresztő RC kapcsolás

Kérdés a kimenő jele időbeli alakja

Egy feltöltött C kondenzátort egy R ellenálláson keresztül kisütünk.



Egyszerű RC kapcsolás

A kondenzátor Q töltése és U_C feszültsége:

$$Q = CU_C$$

Az áram $I = dQ/dt$

A huroktörvény miatt:

$$U_C + U_R = Q/C + IR = Q/C + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

Differenciálegyenlet az időfüggő $Q(t)$ tárolt töltésre - analóg a radioaktív bomlással!

Egyszerű RC kapcsolás időfüggése

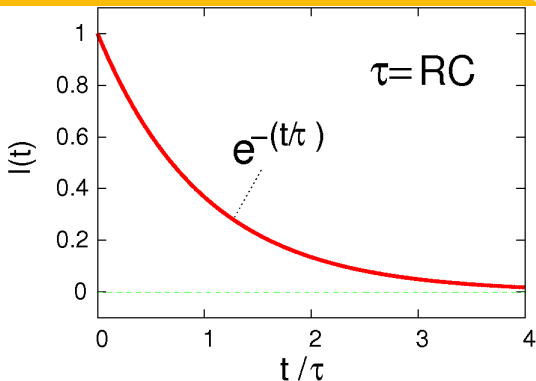
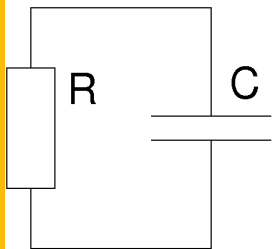
Keressük a megoldást $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ alakban (Q_0 és τ paraméterek)

$$0 = Q + RC \frac{dQ}{dt} = Q_0 e^{-t/\tau} - RC \frac{1}{\tau} Q_0 e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau} \left(1 - RC \frac{1}{\tau} \right)$$

$Q_0 e^{-t/\tau}$ kiemelhető, a zárójelben lévő tag zérus

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}$$

Q_0 a kezdőérték, $\tau = RC$ pedig az időállandó (rögzített paraméter).



A jel exponenciális lecsengés, azaz $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ és $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$.

τ időállandó: a töltés éppen $1/e \approx 1/2.72 \approx 36.8\%$ részére csökken

RC aluláteresztő szűrő

$U_{be}(t)$ bemeneti feszültség zérus $t < 0$, konstans U_0 a $t > 0$ -ra
(lépcsőfüggvény)

$$U_{be} = U_C + U_R \text{ és } U_{ki} = U_C$$

$t > 0$ -ra a megoldás

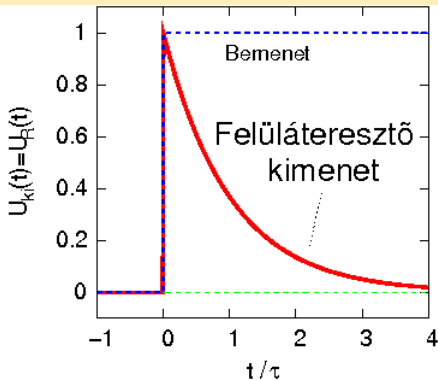
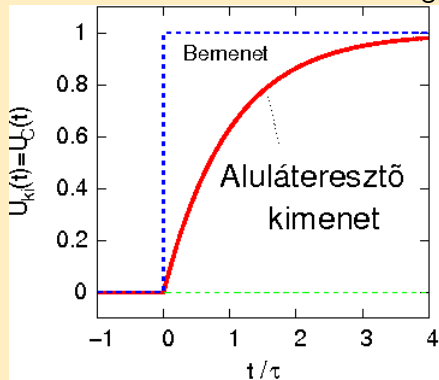
$$U_{ki}(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$$

a kimenő feszültség exponenciálisan közelíti a (konstans) bemenet értéket

RC aluláteresztő szűrő

$$U_{ki}(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$$

A be- és kimenet közötti különbség exponenciálisan csökken



RC felüláteresztő szűrő

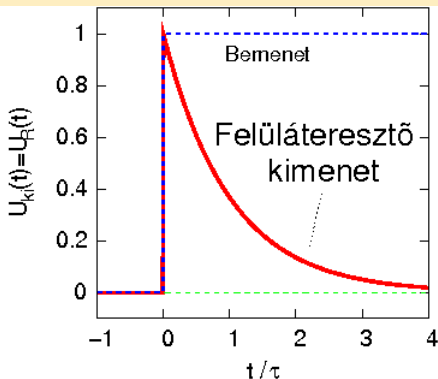
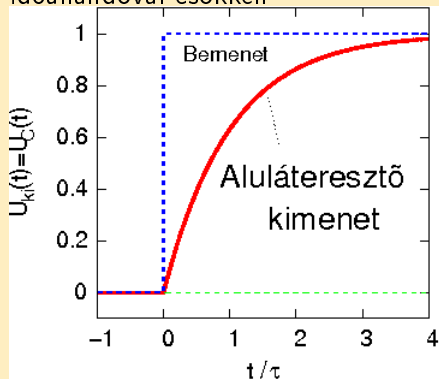
$U_{be}(t)$ bemeneti feszültség zérus $t < 0$, konstans U_0 a $t > 0$ -ra
(lépcsőfüggvény)

$t = 0$ -ban a kimenet felugrik U_0 -ra, majd exponenciálisan $\tau = RC$
időállandóval csökken

Az aluláteresztő és a felüláteresztő jelének összege visszaadja a bemeneti
lépcsőfüggvényt.

RC felüláteresztő szűrő

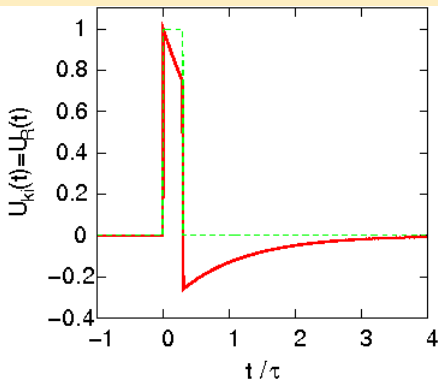
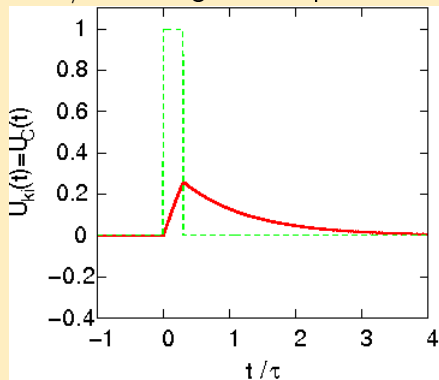
$t = 0$ -ban a kimenet felugrik U_0 -ra, majd exponenciálisan $\tau = RC$ időállandóval csökken



Rövid impulzusra adott kimeneti válasz

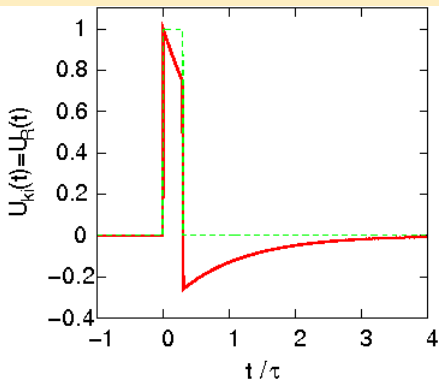
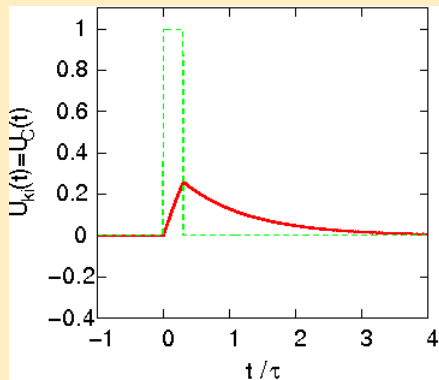
az RC időállandónál jelentősen rövidebb bemenet

Pl. $1/3RC$ ideig tartó impulzus:



A végtelenül rövid, de adott területű impulzus: határeset a Dirac-delta-függvény.

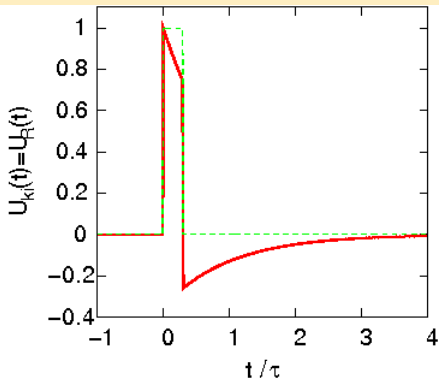
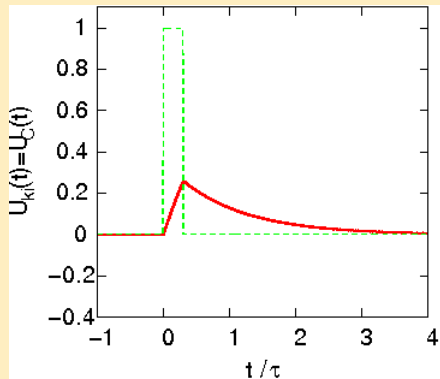
Impulzusra adott kimeneti válasz



Aluláteresztő szűrő: a jel egy kicsi konstans értékig fut fel, majd exponenciálisan lecseng.

Rövid jelekre háromszögjel alakú: integráló áramkör !

Impulzusra adott kimeneti válasz



Felüláteresztő szűrő: az impulzus közvetlenül megjelenik a kimeneten, majd exponenciálisan lecseng (a kondenzátoron az össztöltés 0)

Az aluláteresztő és a felüláteresztő jelének összege visszaadja a bemeneti impulzust. Lépcsőfüggvénnyel is megérthető!