Jelfeldolgozás I (1)

A jf eszköztárát számos tudományos és technológiai területen használják

- Biológiai jelek, orvostudomány EKG, EEG
- részecskefizika LHC detektorainak jelelemzése
- hétköznapi alkalmazások hangtechnika, rádiós komm., digi fotog.
- automatizálás önvezető autó, okos otthon.
- számítástechnika adattárolás, tömörítés, adatátvitel
- pénzügyi modellek

A jf fontos matematikai eszköze a Fourier-transzformáció

A jel fogalmától teméaszetes bennyomásunk van

Általában jel térben és/vagy időben változó fizikai tulajdonság.

A jelfeldolgozás alkalmazott tudomány jelek elemzésével foglalkozik

Sok esetben a vizsgált fiz. tulajdonság először elektromos fesz. változássá alakítjuk és ennek változása van fókuszban

Ha az átalakítás után folytonos mennyiséget vizsgálunk <u>analóg</u> ha diszkrét értékkészletet engedünk meg <u>digitális</u> jelekről beszélünk.

Analóg ~ elt áramköri rendszer
Digitális ~ elt szoftveresen
} ADC / DAC

(I) → (1b)

(1) Mechanikai eredetű jelek

- hangkhullámok
- szeizmográfok

} pontszerű testek mozgásegyenlete $\boxed{F = \dot{p}}$

pl rugóra kötött test $F = -k x \Rightarrow x = -\frac{m}{k}\ddot{x}$

$x = A\sin(\omega t + \phi)$ alakú próba fv $\rightsquigarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

pl hanghullámok $\ddot{\psi} = v^2 \Delta \psi \qquad \Psi(x,t) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$

pl LC rezgőkör $C = \frac{Q}{U_C}$; $I = \dot{Q}$ kapacitás egységnyi töltéshez mekkora E tér kell.

$U_L = L\dot{i}$ induktivitás áramváltozással szembeni ellenállóképesség

$$\left.\begin{array}{l} U_C + U_L = 0 \\ i_C = I_L \end{array}\right\} \ddot{I} = -\frac{1}{LC} I$$

$$I = A \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \phi\right)$$

- fény Maxwell-egyenletek ~ hasonló hullám függvények.

③ eleje JBF

(V) Jelek osztályozása (16)

- determinisztikus
  - periodikus
    - szinuszos
    - összetett (rac frekv. Σ)
  - aperiodikus
    - kvázi per.
    - tranziens (sercegő mikrofon)
- nem det (véletlen)
  - stacionárius
  - nem stacionárius (radioaktív bomlás)

②

Def Vektortér $\mathbb{V}$ halmaz $+, \circ$ művelet $\mathbb{T}$ test fölött

$\forall\, u, v, w \in \mathbb{V}$ és $\forall\, a, b \in \mathbb{T}$

1/ asszociatív $u + (v + w) = (u + v) + w$

2, kommutatív $u + v = v + u$

3, additív egységelem $\exists\, 0 \in \mathbb{V}$ $v + 0 = v$

4, additív inverz $\exists\, -v$ $v + (-v) = 0$

5, kompatibilitás $a(bv) = (ab)v$

6/ multiplikatív egys $1v = v$ $1 \in \mathbb{T}$

7, disztributív a szorzásra $a(u+v) = au + av$

8/ sk. szorz.-sal disztributív $(a+b)u = au + bu$

pl $\mathbb{T}$ általában $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$

$\mathbb{V}$ $\mathbb{R}^N$ szám n-es

Def norma $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ $\forall\, u, v \in \mathbb{V}$ és $\forall\, \lambda \in \mathbb{T}$

1/ $\|u\| \geq 0$ és $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ pozitív definit

2, homogén $\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|$

3/ Δ-egyenlőtlenség $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Def normált tér $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$

pl szám n-sek $\mathbb{R}^N$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|$$

Def metrika $d(u, v) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{T}$

1/ poz definit $d(u,v) \geq 0$ $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

2/ szimmetrikus $d(u,v) = d(v,u)$

3/ 3szög egyenlőtlenség $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Def metrikus tér $(\mathbb{V}, d)$

pl $\mathbb{R}^N$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$

2a

Def Cauchy-sorozat $v_i \in (V, d)$ $i \in \mathbb{N}$
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall m, n > N$ esetén $d(u_m, u_n) < \varepsilon$

Def Teljes metrikus tér $\forall$ Cauchy sorozat a tér eleméhez konvergál.

Mj analóg a $\mathbb{Q}$ nem teljes, de $\mathbb{R}$ teljes

Def Banach-tér $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ teljes a normából származó metrikára $d(u,v) = \|u-v\|$

Mj $\mathbb{R}^N$ bármely metrikával Banach.

Def belső szorzat $\langle u, v \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{T}$

1/ poz definit $\langle v, u \rangle \geq 0$ $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2/ konj szimmetria $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$

3/ első változóban lin $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

4/ első változóban additív $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$

Def belső szorzattér $(\mathbb{V}, \langle \rangle)$

pl $\mathbb{R}^N$-ben $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

Def Hilbert-tér $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ teljes a $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ból származó metrikára
Banach a $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ból szárm. normára.

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ $\qquad d(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$

Tétel Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky egyenlőtlenség
$(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ belsőszorzattér $\forall u, v \in \mathbb{V}$
$\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

Biz $\uparrow^2$ $\langle u, v \rangle^2 = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$
Ha $u = 0$ $\Rightarrow$ OK
$u \neq 0$ bevez $w = v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$

$0 \leq \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle - \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \right)^* \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle v, u \rangle + \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \frac{\langle u, v \rangle^*}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle$

$0 \leq \langle v, v \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle u, u \rangle} \quad \rightsquigarrow \quad |\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle$ (26)

Mj átrendezve $\quad -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$

Def belsőszorzattér elemeinek szöge

$$\alpha := \cos^{-1} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Def ortogonális $u, v \in \mathbb{V}$ ha $\langle u, v \rangle = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Def $u \in \mathbb{V}$ normált $\|u\| = 1$

Def ortonormált sorozat u_n $\langle u_\ell, u_m \rangle = \delta_{\ell m}$ és $\|u_\ell\| = 1$ $\|u_m\| = 1$

Def ortogonális sor $\sum \lambda_n u_n$ u_n ONS $\lambda_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Tétel : $\mathbb{H}$ Hilbert-tér $u_n \; \mathbb{N} \to \mathbb{H}$ ortonormált sorozat

$\lambda_n \; \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ skalár sorozat

$\forall v \in \mathbb{H}$ és $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle v, u_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \langle v, u_k \rangle|^2$$

tehát tetszőleges vektor közelítése bal o min.

$\|v\|^2$ konst 2. tag λ_k fftlen $\rightsquigarrow$ 3. tag min.

$\Rightarrow 0 \rightsquigarrow \lambda_k = \langle v, u_k \rangle$

Def Fourier-együttható $\underline{\lambda_k}$

Def Fourier-sor $\sum_k \langle v, u_k \rangle u_k$ v-nek az u_k ONS-ra vonatkozó F-sora

Tétel Bessel egyenlőség

$$\left\| v - \sum \langle v, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum |\langle v, u_k \rangle|^2$$

Tétel Bessel egyenlőtlenség

$$\sum |\langle v, u_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

Def $f \in \left(L^2_{\mathbb{R}}[0,2\pi]\right)$ sorfejtése

$$a_0 = \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

$$a_k = \langle f, u_{2k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\,dt$$

$$b_k = \langle f, u_{2k-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\,dt$$

együtthatókkal

$$f(t) = \sum_k \langle f, u_k \rangle u_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum a_k \cos(kt) + \sum b_k \sin(kt) \right)$$

Pl négyszögjellel

$$sw(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le t < \pi \\ -1 & \text{ha } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kt)\,dt = \frac{2}{k\sqrt{\pi}} \left(1 - \cos(k\pi)\right)$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{4}{k\sqrt{\pi}} & k \text{ ptlan} \\ 0 & k \text{ ps.} \end{cases}$$

Komplex alakban

$\left(L^2_{\mathbb{C}}[0,2\pi]\right)$ $\quad u(t) = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$

Euler-formula

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$$ komplex trigonometrikus rendszer

~~Folytonos Fourier transzformáció~~

F-sorfejtés tulajdonságai

$f,g \in \left(L^2, [0,2\pi]\right)$ $\qquad a,b \in \mathbb{C}$

$$f(t) = \sum_q F_q \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqt} \qquad F_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-iqt} dt$$

1/ lineáris

$$a f(t) + b g(t) = \sum_q \left(a F_q + b G_q\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqt}$$

2/ időtükrözési tulajdonság

$$h(t) = f(-t) \qquad H_q = F_{-q}$$

3/ komplex konjugálás

$$h(t) = f^*(\cancel{-}t) \qquad H_q = F_{-q}^*$$

4/ időeltolás

$$h(t) = f(t - t_0) \qquad H_q = F_q e^{iqt_0}$$

5/ Parseval-tétel

$$\|f\|^2 = \sum_q |F_q|^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Következmények

1/ $f \in \mathbb{R}$ $\qquad F_{-q} = F_q^*$

2/ f tisztán képzetes $\qquad F_{-q} = -F_q^*$

3/ f páros $\qquad F_{-q} = F_q$

4/ f páratlan $\qquad F_{-q} = -F_q$

5/ f valós és páros $\qquad \mathrm{Re}\, F_q = \mathrm{Re}\, F_{-q} \qquad \mathrm{Im}\, F_q = 0$

6/ f valós és páratlan $\qquad \mathrm{Im}\, F_q = -\mathrm{Im}\, F_{-q} \qquad \mathrm{Re}\, F_q = 0$

7/ f képzetes páros $\qquad \mathrm{Im}\, F_q = \mathrm{Im}\, F_{-q} \qquad \mathrm{Re}\, F_q = 0$

8/ f képz. páratlan $\qquad \mathrm{Re}\, F_q = -\mathrm{Re}\, F_{-q} \qquad \mathrm{Im}\, F_q = 0$

Általánosítás L-periodikus fv-re 3c

$f \in (L^2, [0, 2L])$

Def $$f(t) = \sum \langle f, u_q \rangle u_q = \sum_q F_q \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{iq\frac{\pi}{L}t}$$

$$F_q = \langle f, u_q \rangle = \int_0^{2L} f(t) \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-iq\frac{\pi}{L}t} dt$$

Időbeli jelek esetén szokásos $T = 2L$ jelölés és így $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ alapharmonikus körfrekvencia.

Folytonos Fourier-transzformáció (hullámcsomagok v ∞ hosszú T-periodikus fv-k)

$\boxed{E}$ lineáris 3b 3e

Def $f \in L^2$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$

Folytonos Fourier-tr. tulajdonságai

1/ lin $\mathfrak{F}\{a f(t) + b g(t)\} = a \mathfrak{F}\{f(t)\} + b \mathfrak{F}\{g(t)\}$

2/ időelt. $\mathfrak{F}\{f(t \pm t_0)\} = F(\omega) e^{\pm i\omega t_0}$

3/ frek toltás $\mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega \pm \omega_0)\} = f(t) e^{\mp i\omega_0 t}$

4/ idő tükr $\mathfrak{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$

5/ ps fv $f(t) = f(-t)$ $F(\omega) = F(-\omega)$

6/ ptlan fv $f(t) = -f(-t)$ $F(\omega) = -F(-\omega)$

7/ komp konj $f(t) = f^*(t)$ $\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$

8/ skálázás $\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

9/ dualitás $\mathfrak{F}\{F(\omega)\} = f(-t)$

10/ szorzás $\langle f, g \rangle = \langle F, G \rangle$

11/ Parseval $\int |f|^2 dt = \int |F|^2 d\omega$

12/ deriválás $\mathfrak{F}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = i\omega F(\omega)$

13/ $\mathfrak{F}\{t f(t)\} = i \frac{d}{d\omega} F(\omega)$

14/ korreláció $\boxed{**}$

15/ konvolúció $\boxed{**}$

Jean Baptiste Fourier 1768–1830 francia fizikus matematikus

3d

Szilárd testek hővezetése

$$\underset{\text{fajhő}}{\sigma}\ \frac{\partial T}{\partial t} = \underset{\text{hővezetési együttható}}{K}\ \Delta T$$

Sor formájában ad megoldást.

– o –

3

Def $(C,[a,b])$ $[a,b]$ intervallumon folytonos és korlátos fv-ek

Tétel $(C,[a,b])$ vektortér $\mathbb{R}$ ill $\mathbb{C}$ fölött.

Tétel az alábbi belső szorzatot definiál $(C,[a,b])$-n

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g^*(x)\, dx$$

Mj $\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f(x) f^*(x)\, dx}$

$$d(f,g) = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2\, dx\right)^{1/2}$$

$(C,[a,b])$ nem teljes

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & -1 \le t < -\frac{1}{n} \\ nt & -\frac{1}{n} \le t < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \le t\ 1 \end{cases}$$

$\operatorname{sign}(t) \notin (C,[a,b])$

Def L^2 integrálható fv $f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty$$

Tétel $(L^2,[a,b])$ teljes, azaz Hilbert-tér

Ezen a téren kell egy ortonormált sorozat, h. értelmezni tudjuk a Fourier-sorfejtést.

Valós eset $(L^2_R, [0,2\pi])$

Tétel $u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\quad u_{2k-1}(t) = \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}$ $\quad u_{2k} = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}$

ortonormált sorozat. trigonometrikus rendszer.

$\boxed{*}$ duvers $T \to \infty$

36 → 30

~~$F_q \Rightarrow h(\omega_0 q)$~~

$$f(t) = \sum_q \frac{1}{2L}\left(\int_{-L}^{L} f(s) e^{-iq\frac{\pi}{L}s}\, ds\right) e^{iq\frac{\pi}{L}t} \quad \leftarrow \begin{cases} 2L = T \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_q \omega_0 e^{iq\omega_0 t} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(s) e^{-iq\omega_0 s}\, ds$$

$$= \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi}\sum_q \omega_0 h(\omega_0 q) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi}\sum_q \left(\omega_0(q+1) - \omega_0 q\right) h(\omega_0 q) = \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int h(\omega)\, d\omega$$

$\int$ közelíti $\sum$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s}\, ds\right) d\omega$$

$\boxed{**}$ $\boxed{\text{Konv}}$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \sqrt{2\pi}\, F(\omega)\, G(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\, g(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, F(\omega) * G(\omega)$$

$\boxed{\text{Korr - tétel}}$

$$\mathcal{F}\{f(t) \times g(t)\} = \sqrt{2\pi}\, F(\omega)\, G^*(\omega)$$

Autokorr

$$\mathcal{F}\{f(t) \times f(t)\} = \sqrt{2\pi}\, |F(\omega)|^2$$

← energia sűrűség

5

Nevezetes transzformáltak

Dirac - delta
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{ha } t=0 \\ 0 & \text{ha } t\neq 0 \end{cases} \qquad \int \delta(t)\,dt = 1$$

Mj: páros

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n & \text{ha } -2^{-n} \leq t \leq 2^{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = \delta(t)$$

a) $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

b) $\mathcal{F}\{1\} = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)$

c) $\mathcal{F}\{\delta(t-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega a}$

d) $\mathcal{F}\{e^{iat}\} = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega-a)$

e) $\mathcal{F}\{\sin(at)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left[\delta(\omega-a) - \delta(\omega+a)\right]$

f) $\mathcal{F}\{t^n\} = i^n\sqrt{2\pi}\,\delta^{(n)}(\omega)$

g) $\mathcal{F}\{\Pi(at)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 1 & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

h) $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(at)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\,\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$

i) $\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

j) $\mathcal{F}\{\Lambda(at)\} = \frac{1}{2\pi a^2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2a}\right)$

$\Lambda(t) = \Pi * \Pi$
$= \max\{1-|t|, 0\}$

Mintavételezés

Matematikailag Dirac-fésűvel szorzás

Def Dirac-fésű

$$\Delta_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$$ mintavételezési idő

Tétel Dirac-fésű Fourier-sorfejtése

$$\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_n e^{int\frac{2\pi}{T}}$$

$$\mathcal{F}\{\Delta_T(t)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_n \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

Mj növelve a mintavételt $(T \to 0)$ $\mathcal{F}$-térben ritkul a fésű

Def Mintavételezés $f(t)$ folytonos T mintavételezési idővel

$f_T(n) = f(nT)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Problémakör, mikor állítható vissza $f(t)$ $f_T(n)$-ből

Def $f(t)$ körfrekvencia-korlátos fv ha $\exists B > 0$

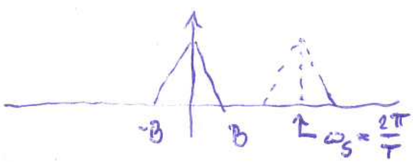
$\Rightarrow F(\omega) = 0 \quad B < |\omega| \quad$ (B sávkorlát)

Tétel Shannon-Nyquist mintavételezési tv

$f(t)$ B sávkorlátos jel

hiba nélkül visszaállítható, ha $\omega_s \geq 2B$,

ahol $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ a mintavételi időköz.



Tétel Shannon-Whittaker-féle interpolációs formula (5b)
(recept a visszaállításra)

$f(t)$-hez $\exists$ $F(\omega)$ és $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t)$

$$\left.\begin{aligned} \sum_n f(t \pm nT) &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_q F(q\omega_s) e^{-i\omega q T} \\ \sum_q F(\omega \pm q\omega_s) &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_n f(nT) e^{i\omega n T} \end{aligned}\right\} \text{Poisson összegzés} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Tehát $f(t)$ értékeit periodikusan Σ-ve = a FT súlyozott par Σ-vel

SW-formula

$$f(t) = \sum_n f(nT) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t - nT}{T}\right)$$

Ha sérül a mintavételi tv
$\leadsto$ aliasing

Véges számú minta

- $\sqcap(t)$-vel szorzás $\leadsto$ sp vonalak szélesedése

$\leadsto$ ablakozó függvények

- koszinusz-ablak $\quad w(t) = \cos\left(\frac{\pi}{T_r} t - \frac{\pi}{2}\right)$
- Hann-ablak $\quad \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_r} t\right)\right)$
- Hamming-ablak $\quad 0{,}54 - 0{,}46 \cos\left(\frac{2\pi}{T_r} t\right)$
- Blackman-ablak $\quad 0{,}42 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{T_r} t\right) + 0{,}08 \cos\left(\frac{4\pi}{T_r} t\right)$
- Bartlett $\quad \wedge\left(\frac{t}{T_r}\right)$

c

Diszkrét-Fourier-transzformáció

$$f(t) \to f_T^N(t)$$

$$f_T^N(t) = 0 \qquad \text{ha } t \in \{0, T, \dots (N-1)T\}$$

$$F_q = \frac{1}{\sqrt{NT}} \int_{-T/2}^{T(N-1)+T/2} f_T^N(t)\, e^{-iqt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NT}} \int f(t) \sum_{j=0}^{N-1} \delta(t - jT) e^{-iqt\frac{2\pi}{NT}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT-T/2}^{nT+T/2} f(t) \sum_{j=0}^{N-1} \delta(t-jT) e^{-iqt\frac{2\pi}{NT}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{-i 2\pi q n/N}$$

F_q N-periodikus tehát érdemi infót $q \in \{0 \dots N-1\}$ hordoz.

Visszaállítás ($T = 1$ egységben)

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_q\, e^{i 2\pi q n/N}$$

Ált komplex f esetén

$$u_q[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iqn2\pi/N} \qquad q \in \{0 \dots N-1\} \quad \text{ortonorm. bázist alkot}$$

$\to$ Fourier-vektor

Def DFT $\quad x \in \mathbb{C}^N$

$$X[q] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-i 2\pi n q/N} \qquad \text{FT vektor}$$

$\dots X[q]\, e^{i 2\pi q n/N} \quad \dots$ FT.

Mj   Ez Mátrix-szorzás!

$$A = \begin{pmatrix} e^{0} & e^{0} & & \\ e^{0} & e^{i2\pi/N} & & \\ e^{0} & e^{i4\pi/N} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & e^{i2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix}$$

$X = A x$ $A^{-1} = (A^{T})^{*}$ Fourier v. Vandermonde mátrix.

fft (fast FT)   Cooley-Tukey algo $N \sim 2^{M}$

Mj: • magasabb dimenzióban
• megjelenítés