Kitekintés: LU dekompozíció

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021 november 24.

Elterjedt és sokak által használt numerikus könyvtárakban, pl a LAPACKban, az ún. $L\,U$ dekompozíción alapuló lineáris egyenletrendszer megoldó algoritmus található

Előkészület: Gauss-elimináció visszahelyettesítéssel

Ez nagyjából azonos a Gauss-Jordan eliminációval, de

- Elimináláskor csak a főátló alatti elemeket nullázuk le
- csak részleges pivotálást alkalmazunk (sorok cseréje)
- A főátlóban minden elemet 1-esre hozunk

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$

Előkészület: Gauss-elimináció visszahelyettesítéssel

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Előkészület: Gauss-elimináció visszahelyettesítéssel

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Előkészület: Gauss-elimináció visszahelyettesítéssel

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Általában: az előző x_i-k ismeretében az x_{i-1} meghatározható:
$x_i = b_i' - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}^{'} x_j$

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Általában: az előző x_i-k ismeretében az x_{i-1} meghatározható:
$x_i = b_i' - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}^{'} x_j$

Meg lehet mutatni, hogy elvileg ez az eljárás összességében kevesebb műveletet igényel, mint a Gauss-Jordan elimináció (ha az A^{-1}-t nem kell számolni)

Általánosabban

Ha az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

Általánosabban

Ha az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

akkor a megoldás:

$$\begin{aligned} x_3 &= b'_3/a'_{33} \\ x_i &= \frac{1}{a'_{ii}} \left[b'_i - \sum_{j=i+1}^{N} a'_{ij} x_j \right] \end{aligned}$$

Alapötlet: tegyük fel, hogy tetszőleges **A** mátrix átírható $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ formába!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1.0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Alapötlet: tegyük fel, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix átírható $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ formába!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1.0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ekkor az $\mathbf{Ax} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása két részre bontható:
Először keressük $\mathbf{y}$-t, amelyre

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

majd ennek ismeretében megoldjuk a

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

rendszert.

Miért jó ez?
Mind a két egyenletrendszer megoldása egyszerű:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_1 \\
y_i &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
x_N &= y_N / u_{NN} \\
x_i &= \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} x_j \right]
\end{aligned}
$$

Miért jó ez?
Mind a két egyenletrendszer megoldása egyszerű:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= b_1 \\
y_i &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
x_N &= y_N / u_{NN} \\
x_i &= \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} x_j \right]
\end{aligned}
$$

Hogyan határozzuk meg az **L**-t és az **U** ?

$L\,U$ dekompozíció

- Állítás: $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ hatékonyan számolható az ún. *Crout algoritmus* segítségével
- ha szükséges: részleges pivotálás a *Crout algoritmus*ban
- ha nincs szükség $\mathbf{A}^{-1}$ számolására akkor ez a leggyorsabb algoritmus

$L\,U$ dekompozíció

- Állítás: **L** és **U** hatékonyan számolható az ún. *Crout algoritmus* segítségével
- ha szükséges: részleges pivotálás a *Crout algoritmus*ban
- ha nincs szükség $\mathbf{A}^{-1}$ számolására akkor ez a leggyorsabb algoritmus

További előnyök:

- A determináns is könnyen számolható: $\det \mathbf{A} = \Pi_{i=1}^{N} u_{ii}$
- a megoldás *iteratív* pontosítása könnyen implementálható

További irodalom