Logisztikus regresszió: költségfüggvény

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2021 november 10.

Költségfüggvény[1]

Maximum likelihood becsléssel kaptuk:

- az **a** paramétervektor legvalószínűbb értéke az, amelyre $J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ minimális

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

[1] Andrew Ng, Coursera alapján

Költségfüggvény[1]

Maximum likelihood becsléssel kaptuk:

- az **a** paramétervektor legvalószínűbb értéke az, amelyre $J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ minimális

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Állítás: ez tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

[1] Andrew Ng, Coursera alapján

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 1$! Ekkor csak a $-\log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 1$! Ekkor csak a $-\log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ akkor $-\log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) \to \infty$

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 1$! Ekkor csak a $-\log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ akkor $-\log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) \to \infty$

Megfelel az intuíciónak: ha $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) = 0$, vagyis $P(y = 1|\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}) = 0$, de a mért érték $y^{(i)} = 1$, akkor a hipotézis és a mérés nagyon eltér $\to$ nagy "költség"

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)})) + (1-y^{(i)}) \log(1-g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 1$! Ekkor csak a $-\log(g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ akkor $-\log(g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)})) \to \infty$

Megfelel az intuíciónak: ha $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) = 0$, vagyis $P(y = 1|\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}) = 0$, de a mért érték $y^{(i)} = 1$, akkor a hipotézis és a mérés nagyon eltér $\to$ nagy "költség"

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) \to 1$ akkor $-\log(g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)})) \to 0$
- tehát ha $y^{(i)} = 1$ és a hipotézis $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) \to 1 \Rightarrow$ kis költség

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 0$! Ekkor csak a $-\log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)})) + (1-y^{(i)}) \log(1-g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 0$! Ekkor csak a $-\log(1-g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ akkor $-\log(1-g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)})) \to 0$
- tehát ha $y^{(i)} = 0$ és a hipotézis $g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ értéket ad $\Rightarrow$ kis költség

Költségfüggvény

$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ tekinthető a logisztikus regresszió költségfüggvényének.

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \log(g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$$

Tfh $y^{(i)} = 0$! Ekkor csak a $-\log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}))$ tagot kell tekinteni

- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ akkor $-\log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) \to 0$
- tehát ha $y^{(i)} = 0$ és a hipotézis $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 0$ értéket ad $\Rightarrow$ kis költség
- ha a hipotézis értéke $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 1$ akkor $-\log(1 - g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)})) \to \infty$
- tehát ha $y^{(i)} = 0$ és a hipotézis $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{(i)}) \to 1 \Rightarrow$ nagy költség

Költségfüggvény

Összefoglalva:

$$\text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) = \begin{cases} -\log(h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) & \text{ha } y^{(i)} = 1 \\ -\log(1 - h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) & \text{ha } y^{(i)} = 0 \end{cases}$$

Költségfüggvény

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}))$$

Költségfüggvény

Összefoglalva:

$$\text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) = \begin{cases} -\log(h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) & \text{ha } y^{(i)} = 1 \\ -\log(1 - h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a})) & \text{ha } y^{(i)} = 0 \end{cases}$$

Költségfüggvény

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{cost}(y^{(i)}, h(\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{a}))$$

Hogyan határozhatjuk meg **a**-t?

$$\min_{\mathbf{a}} [J(\mathbf{a}; \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})]$$