Gauss-Jordan elimináció: bevezetés

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022 november 15.

Feladat: megoldani az alábbi egyenletrendszert:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol **A** négyzetes mátrix.

[1] pivot = csuklópont, de a *pivoting* és *pivot element* szavaknak nincsen bevett fordítása

Feladat: megoldani az alábbi egyenletrendszert:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol **A** négyzetes mátrix.

Gauss–Jordan-elimináció:

- legegyszerűbb általános módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására
- numerikusan stabil, főleg teljes *pivotolás*[1] esetén

[1] pivot = csuklópont, de a *pivoting* és *pivot element* szavaknak nincsen bevett fordítása

A megoldási módszer elemi lépései

A következő műveletek nem változtatják meg egy lineáris egyenletrendszer megoldását (az egyenletrendszer mindkét oldalán végrehajtva):

- *két sor felcserélése*: az egyenletek sorrendje teljesen tetszőleges
- *egy sor lecserélése ennek a sornak és egy másik sornak a lineárkombinációjára*
- *egy sornak egy tetszőleges számmal való szorzása*, ha az a szám nem nulla
- *a változók felcserélése*: ez az **A** mátrix oszlopainak felcserélését jelenti, a végén a változókat vissza kell cserélgetni az eredeti sorrendbe

Kiindulás: kibővített mátrix

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Felírjuk a mátrixot és a jobb oldalt a következő alakban:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right)$$

- a gyakorlatban a jobb oldalt külön tömbben érdemes tárolni
- implementáláskor ne másoljuk egybe a két mátrixot!
- a jobb oldalon akárhány oszlop állhat, az egyenletrendszert egyszerre több **b** vektorra is megoldhatjuk

Stratégia

A korábban ismertetett elemi műveletek segítségével:

- a baloldalt egységmátrix alakra hozni
- de közben a műveleteket a jobb oldalon is elvégezzük
- jobboldalt lényegében beszorozzuk az együttható mátrix inverzével

Az elimináció menete

Elindulunk a főátló első elemétől.

1. Ha az elem nem 1, akkor az egész sort elosztjuk a főátlóbeli elemmel, hogy a főátlóban 1 legyen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{2} & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array}\right)$$

Az elimináció menete

Elindulunk a főátló első elemétől.

1. Ha az elem nem 1, akkor az egész sort elosztjuk a főátlóbeli elemmel, hogy a főátlóban 1 legyen

$$\left(\begin{array}{ccr|r} \mathbf{2} & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccr|r} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array}\right)$$

2. Minden alatta levő sorból kivonjuk az első sor valahányszorosát úgy, hogy a főátló alatt végig 0 legyen

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{crr|r} 1 & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & -2 & -2 & -8 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Az elimináció menete

3. Ha főátlóbeli elem alatt mindent kinulláztunk, akkor folytatjuk a főátló következő elemével:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Az elimináció menete

3. Ha főátlóbeli elem alatt mindent kinulláztunk, akkor folytatjuk a főátló következő elemével:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

4. Majd kivonjuk a sor valahányszorosát az összes többiből úgy, hogy a főátlót kivéve mindenütt 0 legyen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{0} & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Az elimináció menete

5. Az eljárást tovább folytatjuk a főátló elemeire

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Az elimináció menete

5. Az eljárást tovább folytatjuk a főátló elemeire

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

6. Az eljárás akkor ér végét, ha a baloldali részmátrix az egységmátrix alakját veszi fel. Ekkor jobboldalon a megoldást kapjuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{array}\right)$$