

Gauss-Jordan elimináció: pivotálás

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2022 november 15.

Lehetséges problémák: zérus vagy nagyon kis elem a főátlóban

Probléma: zérus elem a főátlóban

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & & & \\ 0 & 1 & 6 & & & \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & & \dots \\ & & \vdots & & & \end{array} \right)$$

Ilyenkor az adott sorral nem tudjuk az alatta és fölötte levő elemeket eliminálni.

Probléma: nagyon kis elem a van főátlóban

- ekkor az eliminációs lépésekben nagy szorzótényezők jelennek meg
- ez numerikus instabilitási problémákhoz vezethet a kerekítési hibák miatt

Lehetséges problémák: zérus vagy nagyon kis elem a főátlóban

Probléma: zérus elem a főátlóban

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 5 & & \\ 0 & 1 & 6 & & \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \end{array} \right)$$

Ilyenkor az adott sorral nem tudjuk az alatta és fölötte levő elemeket eliminálni.

Probléma: nagyon kis elem a van főátlóban

- ekkor az eliminációs lépésekben nagy szorzótényezők jelennek meg
- ez numerikus instabilitási problémákhoz vezethet a kerekítési hibák miatt

Megoldás: [sorcsere](#)

- az egyenletek sorrendje tetszőleges
- keressünk a főátló aktuális eleme alatti valamelyik sorban (de ugyanabban az oszlopban) egy megfelelő elemet (ún. *pivot-elem*)
- cseréljük meg a két sort (a jobboldalt is!), majd folytassuk az eliminációt

⇒ ezt nevezzük *részleges pivotálás*nak.

Hogyan válasszunk pivot elemet?

Egyszerű megoldás:

- válasszuk az adott oszlop főátló alatti abszolút értékben legnagyobb elemét

Hogyan válasszunk pivot elemet?

Egyszerű megoldás:

- válasszuk az adott oszlop főátló alatti abszolút értékben legnagyobb elemét

Kérdés: a sorokat tetszőleges számmal szorozva bármelyik aktuális oszlopbeli, főátló alatti elem lehet maximális.

- hogyan válasszuk ki azt az elemet, amellyel a pivotálást végezzük ?

Hogyan válasszunk pivot elemet?

Egyszerű megoldás:

- válasszuk az adott oszlop főátló alatti abszolút értékben legnagyobb elemét

Kérdés: a sorokat tetszőleges számmal szorozva bármelyik aktuális oszlopbeli, főátló alatti elem lehet maximális.

- hogyan válasszuk ki azt az elemet, amellyel a pivotálást végezzük ?

Megoldás: Úgy keressük a legnagyobb elemet, hogy a sorokat az eredeti mátrix sorainak legnagyobb elemével normáljuk.

- vagy a mátrix sorait a legelején leosztjuk minden sor abszolút értékben maximális elemével,
- vagy csak eltároljuk a legnagyobb elemeket és a döntésnél használjuk őket, de nem normáljuk explicit a sorokat \Rightarrow *implicit pivotálás*

- meg lehet mutatni, hogy a kerekítési hibák miatt a Gauss-Jordan eljárás pivotálás nélkül általában numerikusan nem stabil
- tehát ha az **A** mátrix elég nagy, akkor a kerekítési hibák miatt akkor is pontatlan lesz az eredmény, ha a fentebb említett problémák nem lépnek fel
- ezért a Gauss-Jordan eljárás során minden új oszlopra való továbblépéskor használjunk részleges pivotálást!

- az oszlop főátló alatti része csupa 0

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & & & \\ 0 & 1 & 6 & & & \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & & \dots \\ & & \vdots & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \end{array} \right)$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix szinguláris, nincs megoldás.

További lehetőség: oszlopcseré

Eddig csak az sorok cseréjéről volt szó.

Általánosabban: a főátlóbeli aktuális elem alatti, és tőle jobbra levő almatrixban keressük a pivot-elemet.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 5 & & & & \\ 0 & 1 & 6 & & & & \\ 0 & 0 & \mathbf{z} & \dots & \dots & & \\ & & & x & x & & \\ & & & x & x & & \end{array} \right)$$

- ha $\mathbf{z} = 0$ vagy nagyon kicsi ($\approx 10^{-8}$) \Rightarrow az x -szel jelölt elemek között keresünk új pivot elemet.
- ez vezet a *teljes pivotálás* eljáráshoz

Tapasztalat:

- az algoritmus stabil, ha
 - minden oszlopra való továbblépéskor pivotálunk
 - pivotnak mindig az almatrix abszolút értékben legnagyobb elemét választjuk

Eljárás:

A baloldali mátrix esetében:

- a megfelelő sorokat és oszlopokat megcseréljük, hogy a pivotelem a főátlóba kerüljön
- feljegyezzük, hogy melyik két oszlopot cseréltük meg
- ez valójában a változók átnevezése, így a jobboldal megfelelő sorait az eljárás végén vissza kell majd cserélni!

A jobboldali mátrix esetében:

- csak a sorcserét végezzük el.

Eljárás:

A baloldali mátrix esetében:

- a megfelelő sorokat és oszlopokat megcseréljük, hogy a pivotelem a főátlóba kerüljön
- feljegyezzük, hogy melyik két oszlopot cseréltük meg
- ez valójában a változók átnevezése, így a jobboldal megfelelő sorait az eljárás végén vissza kell majd cserélni!

A jobboldali mátrix esetében:

- csak a sorcserét végezzük el.

Ezután mindkét oldalon az aktuális sorral lefelé eliminálunk.

Melyiket használjuk?

- részleges pivotálás egyszerűbb, nem kell a megoldásvektor elemeinek permutálásával foglalkozni
- de csak olyan számok szolgálhatnak pivot elemként, amelyek már a megfelelő oszlopban vannak.

Tapasztalat: általában a részleges pivotálás “majdnem” olyan jó, mint a teljes