

Gauss-Jordan elimináció: bevezetés

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2023 október 24.

N darab egyenlet N változóval, az a_{ij} és b_j értékek ismertek:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned}$$

Mátrixos alakban:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol \mathbf{A} négyzetes mátrix.

Feladat: megoldani a fenti lineáris egyenletrendszert

¹pivot = csuklópont, de a *pivoting* és *pivot element* szavaknak nincsen bevett fordítása

N darab egyenlet N változóval, az a_{ij} és b_j értékek ismertek:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2 \\&\vdots \\a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M\end{aligned}$$

Mátrixos alakban:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol \mathbf{A} négyzetes mátrix.

Feladat: megoldani a fenti lineáris egyenletrendszert

Gauss–Jordan-elimináció:

- legegyszerűbb általános módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására
- numerikusan stabil, főleg teljes *pivotolás*¹ esetén

¹pivot = csuklópont, de a *pivoting* és *pivot element* szavaknak nincsen bevett fordítása

A következő műveletek nem változtatják meg egy lineáris egyenletrendszer megoldását (az egyenletrendszer mindkét oldalán végrehajtva):

- *két sor felcserélése*: az egyenletek sorrendje tetszőleges
- *egy sor lecserélése ennek a sornak és egy másik sornak a lineárkombinációjára*
- *egy sornak egy tetszőleges számmal való szorzása*, ha az a szám nem nulla
- *a változók felcserélése*: ez az \mathbf{A} mátrix oszlopainak felcserélését jelenti, a végén a változókat vissza kell cserélgetni az eredeti sorrendbe

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Felírjuk a mátrixot és a jobb oldalt a következő alakban:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right)$$

- a gyakorlatban a jobb oldalt külön tömbben érdemes tárolni
- implementáláskor ne másoljuk egybe a két mátrixot!
- a jobb oldalon akárhány oszlop állhat, az egyenletrendszert egyszerre több **b** vektorra is megoldhatjuk

A korábban ismerttetett elemi műveletek segítségével:

- a baloldalt egységmátrix alakra hozni
- de közben a műveleteket a jobb oldalon is elvégezzük
- az eljárás végére a jobboldalt lényegében beszorozzuk az együttható mátrix inverzével

Elindulunk a főátló első elemétől.

- 1 Ha az elem nem 1, akkor az egész sort elosztjuk a főátlóbeli elemmel, hogy a főátlóban 1 legyen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right)$$

Elindulunk a főátló első elemétől.

- 1 Ha az elem nem 1, akkor az egész sort elosztjuk a főátlóbeli elemmel, hogy a főátlóban 1 legyen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right)$$

- 2 Minden alatta levő sorból kivonjuk az első sor valahányszorosát úgy, hogy a főátló alatt végig 0 legyen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 35 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- 3 Ha főátlóbeli elem alatt mindent kinulláztunk, akkor folytatjuk a főátló következő elemével:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- 3 Ha főátlóbeli elem alatt mindent kinulláztunk, akkor folytatjuk a főátló következő elemével:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- 4 Majd kivonjuk a sor valahányszorosát az összes többiből úgy, hogy a főátlót kivéve mindenütt 0 legyen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- 5 Az eljárást tovább folytatjuk a főátló elemeire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

- 5 Az eljárást tovább folytatjuk a főátló elemeire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

- 6 Az eljárás akkor ér végét, ha a baloldali részmátrix az egységmátrix alakját veszi fel. Ekkor jobboldalon a megoldást kapjuk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$