Logisztikus regresszió (logistic regression)

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

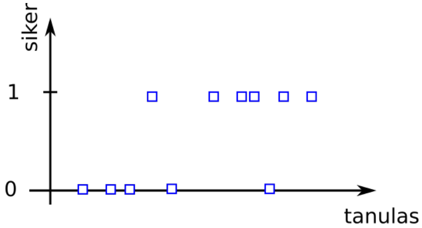
2023 november 14.

Klasszifikáció

- a klasszifikációs problémák hasonlóak a regresszióhoz
- de az $y^{(i)}$ csak néhány diszkrét értéket vehet fel
- most csak bináris klasszifikációt tekintünk ($y^{(i)} = \{0, 1\}$)

Klasszifikáció

- a klasszifikációs problémák hasonlóak a regresszióhoz
- de az $y^{(i)}$ csak néhány diszkrét értéket vehet fel
- most csak bináris klasszifikációt tekintünk ($y^{(i)} = \{0, 1\}$)



- ha a tanulással x_{sajat} időt töltünk, akkor a korábbi adatok alapján az $y = 1$ (sikeres vizsga) vagy a $y = 0$ (sikertelen vizsga) a valószínűbb?

Kérdések

Klasszifikációs probléma esetén:

- mi legyen a $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ hipotézis függvény?
- milyen költségfüggvényt használjunk?

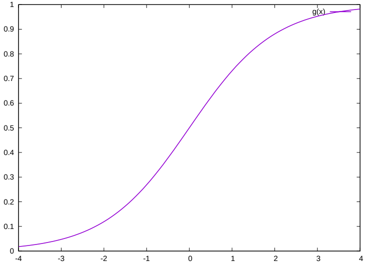
Mi legyen a hipotézis?

- válasszunk olyan $h(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ függényt, amely a valós számokat leképezi a $(0, 1)$ intervallumra
- ilyen pl az ún *sigmoid függvény (logisztikus függvény)*:

$$h(\mathbf{x}; \mathbf{a}) := g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})}}$$

- Jelölés: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ vektorok skalárszorzata
- **Konvenció**: $\mathbf{x}$ vektor 0-ik eleme: $x_0 = 1$
- legegyszerűbb eset: egyetlen x változó esetén $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_0 + a_1 x$

Sigmoid függvény



- nagy pozitív argumentum értékekre $\rightarrow 1$, nagy negatív argumentum értékekre $\rightarrow 0$

Klasszifikáció, döntési határ (Decision boundary)

Hogyan használhatjuk a $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ függvényt klasszifikációra?

Valószínűségi értelmezés:

- adott $\mathbf{a}$ paramétervektor mellett $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ adja meg az $y = 1$ kimenet valószínűségét:
$$P(y = 1|\mathbf{x}; \mathbf{a}) = g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$$

Klasszifikáció, döntési határ (Decision boundary)

Hogyan használhatjuk a $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ függvényt klasszifikációra?

Valószínűségi értelmezés:

- adott **a** paramétervektor mellett $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ adja meg az $y = 1$ kimenet valószínűségét:

$$P(y = 1|\mathbf{x}; \mathbf{a}) = g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$$

Klasszifikáció: adott **a** és **x** mellett

$$\text{ha } g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \geq 0.5 \Rightarrow \text{kimenet} “y = 1''$$
$$\text{ha } g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) < 0.5 \Rightarrow \text{kimenet} “y = 0''$$

Példa egyszerű klasszifikációra

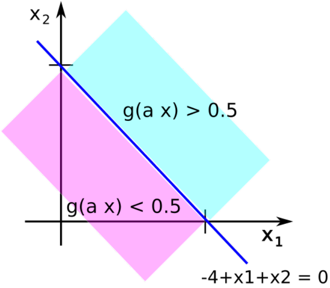
A $g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$ függvényt akarjuk arra használni, hogy megjósoljuk, bukunk vagy átmegyünk a vizsgán: $y = \{0, 1\}$

Tfh $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -4.0 + 1 \cdot x$

- ha kevesebb, mint 4 órát tanultunk, i.e., $x < 4.0$:
  - $-4.0 + 1 \cdot x < 0 \Rightarrow g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) < 0.5$
  - a kimenet "$y = 0$", bukás a vizsgán
- ha $x \geq 4$ órát tanultunk:
  - $-4.0 + 1 \cdot x > 0 \Rightarrow g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \geq 0.5$
  - a kimenet "$y = 1$", vagyis sikeres vizsga

Kétváltozós példa: döntési határ

Tfh $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -4.0 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$



- $-4.0 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$ kijelöl egy határt
- egy nevezzük döntési határnak (decision boundary)
- felső félsíkban $-4.0 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 0$, vagyis a klasszifikáció értéke "$y = 1$"
- az alsóban $-4.0 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 < 0$, tehát "$y = 0$"

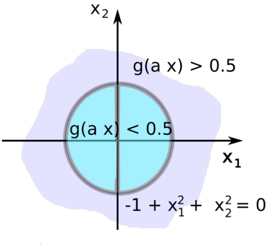
Kitekintés: bonyolultabb döntési határ

- az **x** vektort általánosan érthetjük: pl $\mathbf{x} = (x_1^2, x_2^2 \dots x_j^2)^T$
- tehát **x** tartalmazhatja az eredeti x_j-k valamilyen függvényét is

Kitekintés: bonyolultabb döntési határ

- az $\mathbf{x}$ vektort általánosan érthetjük: pl $\mathbf{x} = (x_1^2, x_2^2 \dots x_j^2)^T$
- tehát $\mathbf{x}$ tartalmazhatja az eredeti x_j-k valamilyen függvényét is

Tfh $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -1.0 + x_1^2 + x_2^2$



- $-1 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ kijelöl egy határt
- ha $-1 + x_1^2 + x_2^2 < 0$ akkor a klasszifikáció értéke "$y = 0$"
- ha $-1 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ akkor "$y = 1$"

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$-tól függően bonyolult döntési határokat tudunk leírni.