

Kitekintés: LU dekompozíció

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2020 október 5.

Elterjedt és sokak által használt numerikus könyvtárakban, pl a LAPACKban, az ún. LU dekompozíción alapuló lineáris egyenletrendszer megoldó algoritmus található

Ez nagyjából azonos a Gauss-Jordan eliminációval, de

- Elimináláskor csak a főátló alatti elemeket nullázzuk le
- csak részleges pivotálást alkalmazunk (sorok cseréje)
- A főátlóban minden elemet 1-esre hozunk

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Általában: az előző x_i -k ismeretében az x_{i-1} meghatározható:

$$x_i = b'_i - \sum_{j=i+1}^N a'_{ij} x_j$$

Pl:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Hogyan kapjuk meg a megoldást ?

Az utolsó elemet az megoldásvektorból csak le kell olvasni: $x_3 = 4$

A következő már egyszerű: $x_2 = 4 - 1 \cdot x_3$

Általában: az előző x_i -k ismeretében az x_{i-1} meghatározható:

$$x_i = b'_i - \sum_{j=i+1}^N a'_{ij} x_j$$

Meg lehet mutatni, hogy elvileg ez az eljárás összességében kevesebb műveletet igényel, mint a Gauss-Jordan elimináció (ha az A^{-1} -t nem kell számolni)

Ha az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

Ha az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

akkor a megoldás:

$$x_3 = b'_3 / a'_{33}$$
$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left[b'_i - \sum_{j=i+1}^N a'_{ij} x_j \right]$$

Alapötlet: tegyük fel, hogy tetszőleges \mathbf{A} mátrix átírható $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ formába!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1.0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Alapötlet: tegyük fel, hogy tetszőleges **A** mátrix átírható **A = L · U** formába!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1.0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Ekkor az **Ax = (L · U)x = L · (Ux) = b** egyenletrendszer megoldása két részre bontható:

Először keressük **y**-t, amelyre

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

majd ennek ismeretében megoldjuk a

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

rendszert.

Miért jó ez?

Mind a két egyenletrendszer megoldása egyszerű:

$$y_1 = b_1$$
$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

és

$$x_N = y_N / u_{NN}$$
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N u_{ij} x_j \right]$$

Miért jó ez?

Mind a két egyenletrendszer megoldása egyszerű:

$$y_1 = b_1$$
$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

és

$$x_N = y_N / u_{NN}$$
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N u_{ij} x_j \right]$$

Hogyan határozzuk meg az **L**-t és az **U** ?

- Állítás: \mathbf{L} és \mathbf{U} hatékonyan számolható az ún. *Crout algoritmus* segítségével
- ha szükséges: részleges pivotálás a *Crout algoritmusban*
- ha nincs szükség \mathbf{A}^{-1} számolására akkor ez a leggyorsabb algoritmus

- Állítás: **L** és **U** hatékonyan számolható az ún. *Crout algoritmus* segítségével
- ha szükséges: részleges pivotálás a *Crout algoritmusban*
- ha nincs szükség \mathbf{A}^{-1} számolására akkor ez a leggyorsabb algoritmus

További előnyök:

- A determináns is könnyen számolható: $\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^N u_{ii}$
- a megoldás *iteratív* pontosítása könnyen implementálható

