Differenciálegyenletek: bevezetés I.

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2020 október 5.

Differenciálegyenletek: olyan egyenletek, ahol

- a megoldást függvény alakjában keressük
- az egyenletben a függvény és deriváltjai szerepelnek
- adottak még kezdeti feltételek és határfeltételek

Példa: leejtett kő, homogén gravitációs térben:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{m}$$

Kezdeti feltételek:

$$x(t=0) = x_0 \qquad \text{kezdeti magasság}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0 \qquad \text{kezdeti sebesség}$$

Példa egyszerű egyenlet megoldására

Az előbbi egyszerű mozgásegyenletet kétszer integrálva $\mathrm{d}t$ szerint:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{F}{m} \\
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{F}{m} t + v_0 \\
x(t) &= \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + x_0
\end{aligned}
$$

Differenciálegyenletek csoportosítása

Változók száma szerint

- *közönséges:* egyváltozós, az $x = x(t)$ megoldás csak t-től függ

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t)$$

- *parciális differenciálegyenlet:* többváltozós, parciális deriváltak is szerepelnek

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}$$

  $\phi(x,t)$ függvény hely és időfüggő is

Differenciálegyenletek csoportosítása

A *differenciálegyenlet rendje*

- az a legmagasabb derivált, ami szerepel az egyenletben

Az *első rendű* egyenletben legfeljebb első rendű derivált szerepel
Példa: az $I = I(x)$ fényintenzitás csökkenése fényelnyelő közegben:

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = -kx$$

A dinamikai törvények többsége lineáris *másodrendű* differenciálegyenlet
Példa: harmonikus oszcillátor

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t)$$

Differenciálegyenletek csoportosítása

Lineáris vs. nem lineáris differenciálegyenlet
A tananyagban általában lineáris differenciálegyenletek fordulnak elő, de pl. bizonyos növekedési folyamatokat leíró, a folyadékáramlás, az általános relativitáselmélet egyenletei nem azok.

Lineáris differenciálegyenlet: ha az $x(t)$ és deriváltjai mind első hatványon szerepelnek
példa: harmonikus oszcillátor

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t)$$

Nem lineáris differenciálegyenlet: az $x(t)$ vagy deriváltjai magasabb hatványon
Példa: Navier–Stokes-egyenletek

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p$$

Differenciálegyenletek rendszere

Ha egyszerre több ismeretlen függvényünk is van, és ezekre több egyenletünk, akkor az egy differenciálegyenlet-rendszer.

- az egyenletek ugyanazoktól a változóktól függnek

Az egyenletrendszer általában csatolt

- ugyanaz a függvény több egyenletben is szerepel, pl:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} &= t - t^2 z(t) \end{aligned}$$

Lineáris differenciálegyenlet (rendszer) megoldása

Másodrendű (vagy akár magasabb rendű) egyenletek numerikus megoldása általában nem probléma, ha az egyenlet maga lineáris.

Megoldás menete: átírjuk az egyenletet elsőrendű egyenletek rendszerére, és azokat párhuzamosan integráljuk.

Példa: rugó egyenlete

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{x(t)}{m}$$

Átírva:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -k\frac{x(t)}{m}\\ \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= v(t)\end{aligned}$$

Közönséges első rendű egyenletek rendszere

Az általános probléma: N darab egyenlet rendszere

$$\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_N)$$

- az f_i függvények tetszőlegesek, de nem tartalmazzák az y_i-k deriváltjait.
- kezdeti feltételek: $y_i(x = x^{(0)}) = y_i^{(0)}$

Az általános probléma: N darab egyenlet rendszere

$$\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_N)$$

- az f_i függvények tetszőlegesek, de nem tartalmazzák az y_i-k deriváltjait.
- kezdeti feltételek: $y_i(x = x^{(0)}) = y_i^{(0)}$

$y_i(x)$-t és $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_N)$-t egy vektor elemeinek tekinjük

Vektoros írásmód: $y_i(x) \to \mathbf{y}(x)$, $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_N) \to \mathbf{f}(x, y_1, y_2, ..., y_N)$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, y_1, y_2, ..., y_N)$$