Differenciálegyenletek: bevezetés II.

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2020 október 12.

Differenciálegyenletek numerikus integrálása

Lineáris egyenletek analitikus megoldásakor

- a homogén egyenlet megoldása az *általános megoldás*
- a konkrét kezdeti feltételeket megkövetelve *partikuláris megoldást* kapunk

Numerikus integráláskor

- majdnem mindig csak partikuláris megoldást adunk
- a függvény értékeit csak diszkrét helyeken adjuk meg
- bízunk abban, hogy ez nagyon hasonlít az analitikus megoldáshoz

Térbeli határfeltételek

- a fizikai folyamatok valamilyen dobozba vannak zárva
- a doboz falán van valamilyen határfeltétel

Példa: molekuladinamika

- mi történik a részecskével a doboz falán?
- rugalmasan visszapattan
- kimegy az egyik oldalon és bejön a másikon $\Rightarrow$ periodikus határfeltétel (nagyon nagy tér szimulációja)

A határfeltétel parciális differenciálegyenleteknél bonyolul lehet (pl. függvényérték és/vagy merőleges irányú parciális derivált megadása).

Kezdeti- és peremfeltételek

Általában a keresett függvények értékei a kiindulási pontban vannak megadva

- de lehet, hogy a kezdeti és végpont is adott
- vagy nem azonos időpontban adottak a kezdeti paraméterek

Példák:

- kisbolygók pozícióját eltérő időpontokban sikerült csak meghatározni, integrálni kell a pályájukat
- ismerjük a részecske kezdőpontját és a végpontbeli sebességét, meg kell határozni a pályáját

Kezdeti- és peremfeltételek

Általában a keresett függvények értékei a kiindulási pontban vannak megadva

- de lehet, hogy a kezdeti és végpont is adott
- vagy nem azonos időpontban adottak a kezdeti paraméterek

Példák:

- kisbolygók pozícióját eltérő időpontokban sikerült csak meghatározni, integrálni kell a pályájukat
- ismerjük a részecske kezdőpontját és a végpontbeli sebességét, meg kell határozni a pályáját

Most csak közönséges kezdeti érték problémákat fogunk nézni.

- a deriváltak "analitikusan" adottak
- a megoldást "numerikus" alakban keressük

Differenciálegyenlet-rendszer megadása

Közönséges differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Program írásakor

- A koordinátákat nem érdemes külön-külön változóban tárolni, tegyük be mindet egy vektorba
- ugyanígy az egyenlet paramétereivel is
- az f_i függvényeket kell megírni

Példa: harmonikus oszcillátor

Harmonikus oscillátor mozgását leíró differenciálegyenlet rendszer

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -k\frac{x(t)}{m} \\
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= v(t)
\end{aligned}
$$

Példa: harmonikus oszcillátor

Harmonikus oscillátor mozgását leíró differenciálegyenlet rendszer

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= -k\frac{x(t)}{m} \\
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= v(t)
\end{aligned}
$$

Definiáljuk a $\mathbf{y} = (x(t), v(t))$ és a $dy_i = f_i$ vektorokat

```
void harmonikusOszcillator(
    double *param,  // parameterek vektora
    double *y,      // fuggvenyertekek vektora
    double *dy)     // derivaltak vektora
{
    double k = param[0];
    double m = param[1];
    double x = y[0];
    double v = y[1];
    dy[0] = v;
    dy[1] = - k / m * x;
}
```