Az Euler módszer

Kormányos Andor

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

2020 október 12.

Euler módszer

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \ldots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Ötlet:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Euler módszer

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek rendszere:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_i)$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \dots)^T$ több változó vektora, pl fázistér: koordináták és sebességek, x változó skalár, pl az idő

Ötlet:

- kezeljük a problémát iteratívan
- írjuk át a $\mathrm{d}x$ differenciálokat véges Δx differenciákra
- a Δx lépéshosszt általában h-val jelöljük
- léptessük a változók értékét diszkrét lépésekben
- az összes változót egyszerre!

Az n-ik lépésben:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \cdot \mathbf{f}(x_n, y_n)$$

Eközben a független változó is lép:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

- mivel az Euler módszer ennek csak az első két tagját adja meg, nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél

A hiba kiszámítása

Egy **y** vektorelemre:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Tegyük fel, hogy x_n helyen a diszkréten számított y_n és az egzakt $y(x_n)$ megoldás azonos volt.

- nézzük meg az eltérést egy lépés után $\Rightarrow$ *lokális hiba*
- tekintsük $y(x)$ Taylor-sorát x körül az $x + h$ helyen:

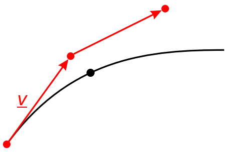
$$y_{n+1} = y(x+h) = y(x) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} h + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} h^2 + \ldots$$

- mivel az Euler módszer ennek csak az első két tagját adja meg, nem lehet pontosabb $O(h^2)$-nél
- a teljes számolás során $\sim 1/h$ lépés végzünk, ezért a globális hiba nem lehet kisebb $O(h)$-nál.

Az Euler-módszer hibája

Az Euler-módszer esetében a deriváltak értékét mindig a lépés elején vesszük

- ha a derivált a lépés során túl gyorsan változik, akkor a lépésnek lesz valamekkora hibája
- idővel nagy lesz az eltérés az analitikus megoldástól



- az Euler-módszer egy lépésének hibája ugyan $O(h^2)$, viszont a lépések számával a hiba felösszegződik
- ha a lépést felére csökkentjük, a hiba a negyedére csökken, de kétszer több lépésre van szükség

Példa: harmonikus oscillátor

Harmonikus oszcillátor: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kx}{m}$

Átírva elsőrendű egyenletek rendszerére:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{kx}{m} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v \end{aligned}$$

Felírjuk az egyenletrendszer diszkretizált változatát

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \frac{k \cdot x_n}{m} \cdot \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Majd az idő léptetése

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Itt most x és v felel meg a korábbi $\mathbf{y}$ vektor elemeinek, t a korábbi x független változónak és Δt a h lépésköznek.

Egyszerű Euler-lépés általános esetben

Differenciálegyenlet rendszer:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x, y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

```
void diff(double *x, double *y, double *dy)
{
  // itt kiszamoljuk az f vektorban
  // tarolt derivaltakat
}


void euler_step(double *x, double *y,
                double *dy, double h,
                int N)
{
  diff(x, y, dy);
  for (int i = 0; i < N; i ++)
  {
    // valtozok leptetese
    y[i] = y[i] + h * dy[i];
  }
  // ido leptetese
  *x += h;
}
```

- a `diff` függvény számolja ki a deriváltakat az aktuális **y**-t és x-t használva
- a deriváltakat **dy** vektorban kapjuk vissza
- a `euler_step` függvény lépteti az algoritmust

Egyszerű Euler-lépés általános esetben

Hogyan néz ki a `diff` függvény?

Hogyan néz ki a diff függvény?

Korábban már láttunk egy példát:

```
void harmonikusOszcillator(
    double *param,   // parameterek vektora
    double *y,       // fuggvenyertekek vektora
    double *dy)      // derivaltak vektora
{
    double k = param[0];
    double m = param[1];
    double x = y[0];
    double v = y[1];
    dy[0] = v;
    dy[1] = - k / m * x;
}
```

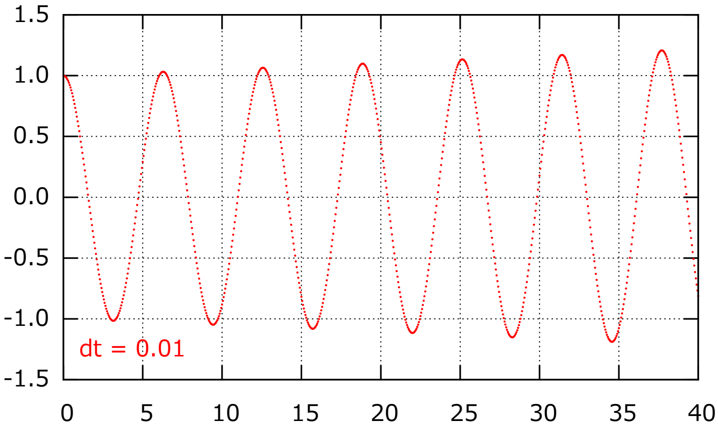
Egyszerű Euler-lépés általános esetben

```c


void diff(double *x, double *y, double *dy)
{
  // itt kiszamoljuk az f vektorban
  // tarolt derivaltakat
}


void euler_step(double *x, double *y,
                double *dy, double h,
                int N)
{
  diff(x, y, dy);
  for (int i = 0; i < N; i ++)
  {
    // valtozok leptetese
    y[i] = y[i] + h * dy[i];
  }
  // ido leptetese
  *x += h;
}
```

Figyeljünk a mutatók használatára:

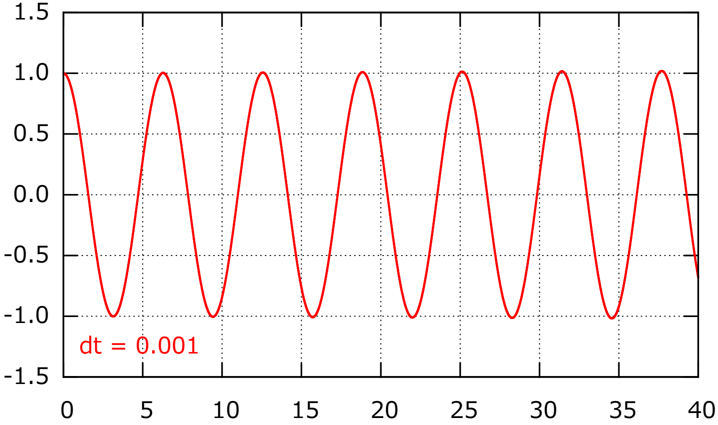
- x skalár változó, az értékét felülírja a függvény és így adja vissza a `main` függvénynek
- $\mathbf{y}$ és $\mathbf{dy}$ vektorok, az első elem címét adjuk át mutatóval
- $\mathbf{y}$ elemeit `for` ciklusban számoljuk
- a h-t és az N-t érték szerint is átadhatjuk, mert nem változnak

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



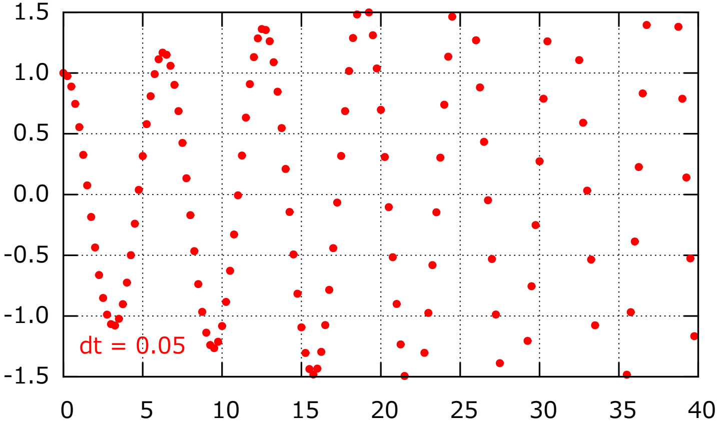
- Az oszcilláció amplitúdója időben lassan növekszik!

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t kisebbre vesszük, az oszcilláció amplitúdója az adott időtávon állandó

Harmonikus oszcillator integrálása Euler módszerrel



- ha dt-t nagy, az oszcilláció amplitúdója gyorsan nő a számolásban

Energiamegmaradás

Az előző példában: harmonikus oszcillátor

- a test minden kilengéskor egy kicsit túllendült
- ez a módszer módszer pontatlansága miatt volt így
- a test minden kitéréskor plusz potenciális energiát nyert

Dinamikai rendszerek szimulációjakor az energiamegmaradás alapkövetelmény
$\Rightarrow$ az Euler-módszer nem elég jó!